

УДК 539.3:534.1

MSC 35Q74

Particulars of a wave field in a semi-infinite waveguide with mixed boundary conditions at its edge

N. Gorodetskaya, I. Starovoit, T. Shcherbak

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: nsgihm@mail.com

The work is devoted to the analysis of the wave field, which is excited by the reflection of the first normal propagation Rayleigh-Lamb wave from the edge of an elastic semi-infinite strip, part of which is rigidly clamped, and part is free from stresses. The boundary value problem belongs to the class of mixed boundary value problems, the characteristic feature of which is the presence of a local feature of stresses at the point of change of the type of boundary conditions. To solve this boundary value problem, the paper proposes a method of superposition, which allows to take into account the feature of stresses due to the asymptotic properties of the unknown coefficients. Asymptotic dependences for coefficients are determined by the nature of the feature, which is known from the solution of the static problem. The criterion for the correctness of the obtained results was the control of the accuracy of the law of conservation of energy, the error of which did not exceed 2% of the energy of the incident wave for the entire considered frequency range. The paper evaluates the accuracy of the boundary conditions. It is shown that the boundary conditions are fulfilled with graphical accuracy along the entire end of the semi-infinite strip, except around a special point (ε). In this case, along the clamped end of the semi-infinite strip in the vicinity of a special point of stress remain limited. The presence of the region ε and the limited stresses are due to the fact that the calculations took into account the N members of the series that describe the wave field, and starting from the $N + 1$ member of the series moved to asymptotic values of unknown coefficients, the number of which was also limited to $2N$. As the value N increased, the accuracy of the boundary conditions increased, the region ε decreased, and the magnitude of the stresses near the singular point increased.

Key words: elastic waves; mixed boundary conditions, energy analysis.

Особливості хвильового поля в півскінченному хвилеводі зі змішаними граничними умовами на його торці

Н.С. Городецька, І.В. Старовойт, Т.М. Щербак

Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ, Україна

E-mail: nsgihm@mail.com

Робота присвячена аналізу хвильового поля, яке збуджується при відбитті першої нормальної хвилі Релея-Лемба, що поширюється, від торця пружного півшару, частина якого жорстко защемлена, а частина - вільна від напружень. Поставлена гранична задача відноситься до класу змішаних граничних задач, характерною особливістю яких є наявність локальної особливості по напруженням в точці зміни типу граничних умов. Для розв'язання поставленої граничної задачі, в роботі запропоновано метод суперпозиції, який дозволяє врахувати особливість по напруженням через асимптотичні властивості невідомих. Асимптотичні залежності для невідомих визначаються характером особливості, який відомий з розв'язку статичної задачі. Критерієм правильності отриманих результатів був контроль точності виконання закону збереження енергії, похибка виконання якого не перевищувала 2% енергії падаючої хвилі для всього розглянутого частотного

діапазону. В роботі зроблена оцінка точності виконання крайових умов. Показано, що крайові умови виконуються з графічною точністю по всьому торцю півшару, за винятком околу особливої точки (ε). При цьому, вздовж защемленого торця півшару в околі особливої точки напруження залишаються обмеженими. Наявність області ε і обмеженість напружень обумовлена тим, що при розрахунках враховували N членів ряду, які описують хвильове поле, а починаючи з $N+1$ члену ряду переходили до асимптотичних значень невідомих, число яких також було обмежено до $2N$. При збільшенні величини N точність виконання крайових умов збільшувалась, область ε зменшувалась і величина напружень в околі особливої точки зростала.

Ключові слова: пружні хвилі; змішана гранична задача, енергетичний аналіз.

1. Вступ

При побудові точних розв'язків ряду крайових задач лінійної теорії пружності поле напружень може має локальну особливість, яка проявляється в необмеженому зростанні напружень в околі особливої точки. Така поведінка напруження має місце в точках зміни типу граничних умов, при наявності неоднорідності матеріалів, в кутових точках. Фізична інтерпретація особливості полягає в тому, що в області високого напруження відбувається перехід від пружного до пластичного стану, або навіть до руйнування матеріалу. У зв'язку з цим значні зусилля були направлені на розуміння як математичної і інженерної значимості сингулярності, так і на шляхи зменшення ступеню кореневої сингулярності або навіть її усунення за рахунок зміни геометричної конфігурації або механічних умов [1]. Зауважимо, що врахування сингулярності в характеристиках фізичних полів, особливо для динамічних задач, вимагає відповіді на ряд принципових питань. Перш за все це однозначне апріорне визначення характеру сингулярності в залежності від геометричних і фізичних умов задачі. Для широкого класу задач ступінь особливості в залежності від геометрії і порядок особливості (логарифмічна або степенева) в залежності від характеру крайових умов наведені в роботі [2]. Для кількісних оцінок параметрів поля, фізичні характеристики якого мають сингулярність, необхідно встановити розмір області в околі сингулярності, яка вважається малою, і поза якою отриманий розв'язок можна вважати достовірним. Ці питання частково розглядаються в даній роботі на прикладі крайова задача з локальною особливістю в точці зміни типу граничних умов, а саме відбиття нормальної хвилі від торця півшару, частина якого жорстко защемлена, а частина вільна від напружень.

2. Постановка задачі

Розглядається модельна задача про збудження хвильового поля в пружному ізо-тропному півшарі товщиною $2H$ з геометричними характеристиками: $Y = \pm H, Z \geq 0, -\infty < X < +\infty$. В подальшому використовуються нормовані величини: $y = Y/H, z = Z/H$. Бічні поверхні $y = \pm 1, z \geq 0$ вільні від напружень, а на торці задаються мішані граничні умови. На проміжку $|z| \leq h$ торець хвилеводу жорстко защемлений, а $|z| \geq h$ - вільний від напружень. Пружні властивості матеріалу хвилеводу описуються ν - коефіцієнтом Пуассона, μ - модулем зсуву. Розглядаються гармонічні хвильові рухи, тобто кінематичні та силові характеристик поля

мають множник $e^{-i\omega t}$, який подалі опускається. Джерелом збудження коливань в півшарі є перша мода, яка поширюється з $y \rightarrow +\infty$ і позначається індексом (0).

Необхідно знайти вектор зміщення $\vec{u}(y, z)$, який задовольняє векторному рівнянню Ламе:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

умові відсутності напружень на поверхнях $y = \pm 1, z \geq 0$

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0, \tau_{yz}(\pm 1, z) = 0 \quad z \geq 0 \quad (2)$$

а також крайовим умовам на торці $|y| \leq 1, z = 0$

$$\sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) = 0, h \leq |y| \leq 1, \quad \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) = 0, h \leq |y| \leq 1, \quad (3)$$

$$u_y(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0) = 0, |y| \leq h \quad u_z(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0) = 0, |y| \leq h$$

Розглядаються антисиметричні відносно площини $y = 0$ коливання.

Падаюча хвиля описується співвідношеннями

$$u_z^{(0)} = i\xi_1 \left(p_2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi_1^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right), \quad (4)$$

$$u_y^{(0)} = \xi_1^2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi_1^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{sh } p_1}, \quad p_j^2(\xi) = \xi^2 - \Omega_j^2$$

Де ξ_1 - перший дійсний корінь дисперсійного рівняння

$$(2\xi^2 - \Omega_2^2)^2 p_1 \text{th } p_1 - 4\xi^2 p_1^2 p_2 \text{th } p_2 = 0 \quad (5)$$

$\Omega_i = \omega H / c_i$, c_i - швидкість поздовжніх ($i=1$) і поперечних ($i=2$) хвиль.

Для знаходження однозначного розв'язку необхідно враховувати умови випромінювання на нескінченність.

3. Метод розв'язання

Розв'язок сформульованої вище граничної задачі побудований на основі методу суперпозицій, в рамках якого розв'язок складається з двох складових. Перша складова володіє достатнім ступенем вільності для задоволення крайових умов на сторонах півшару $y = \pm 1$ і може бути представлена як розв'язок граничної задачі для нескінченного шару. З урахуванням відсутності дотичних напружень на поверхнях $y = \pm 1$ ця складова для напруження має вигляд:

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\frac{(\tau^2 + p_2^2)(\tau^2 + \Omega_0^2)}{2p_1} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{ch } p_1} - \tau^2 p_2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{ch } p_2} \right] e^{i\tau z} d\tau, \quad (6)$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2\mu} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \tau \frac{\tau^2 + p_2^2}{2} \left(\frac{\text{ch } p_2 y}{\text{ch } p_2} - \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{ch } p_1} \right) e^{i\tau z} d\tau.$$

Другу складову загального розв'язку для півшару визначає відомий розв'язок граничної задачі для періодично деформівної півплощини:

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \frac{\beta_k^2 + q_1^2}{2} e^{-q_1 z} + B_k \beta_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \sin \beta_k y, \quad q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & \beta_k \geq \Omega_j \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & \beta_k < \Omega_j. \end{cases}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{2\mu} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \beta_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} q_2 e^{-q_2 z} \right) \cos \beta_k y, \quad \beta_k = \frac{2k-1}{2} \pi. \quad (7)$$

Характерною рисою поставленої задачі є наявність локальної степеневі особливості по напруженням в точці зміни типу крайових умов ($z=0, y=\pm h$), показник якої відомий з розв'язку статичної задачі.

В даній роботі характер сингулярності враховується через асимптотичні властивості невідомих. Для їх знаходження враховується асимптотична поведінка напружень в околі особливої точки. Для дотичного напруження

$$t_{zy}(y)|_{z=0} = \frac{\tau_0 \cos(\eta \lg(\sqrt{h-y}))}{(h^2 - y^2)^{1/2}} \quad \text{при } y \rightarrow h-0 \quad \eta = \frac{1}{3-4\nu}, \quad (8)$$

τ_0 – константа, яка підлягає визначенню. Коливальним характером особливості в ряді випадків можна нехтувати, оскільки, як було показано в [3], розмір зони, в якій коливання необхідно враховувати, не більше атомних зв'язків. В даній роботі коливальний характер особливості по напруженням в околі особливої точки не враховувався.

Представляючи (8) у вигляді ряду по системі ортогональних функцій $\cos(\beta_k y)$ на інтервалі $[0, h]$, з урахуванням співвідношень:

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{\beta-1} \begin{cases} \sin bt \\ \cos bt \end{cases} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2a}{b} \right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \begin{cases} H_{\beta-1/2}(ab) \\ J_{\beta-1/2}(ab) \end{cases},$$

і зробивши припущення, що для великих значень k характер поведінки коефіцієнтів A_k, B_k визначається поведінкою напруження в околі особливої точки отримуємо рівняння для визначення асимптотики коефіцієнтів.

$$A_k \beta_k q_1 + B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} = \frac{\pi}{2} \tau_0 J_0(\beta_k h) \quad (9)$$

Поступаючи аналогічним чином для нормального напруження σ_{zz} отримаємо друге рівняння для визначення A_k, B_k при $k \rightarrow \infty$

$$A_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} \beta_k + B_k \beta_k q_2 = \frac{\pi}{2} \sigma_0 H_0(\beta_k h) \quad (10)$$

Для відшукування комплексних коефіцієнтів A_k, B_k виконуємо крайові умови (3), які запишемо наступним чином [4]:

$$G_1(z) = \begin{cases} u_y(y,0) + u_y^{(0)}(y,0) = 0, & 0 \leq |y| \leq h \\ \tau_{zy}(y,0) + \tau_{zy}^{(0)}(y,0) = 0, & h \leq |y| \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

$$G_2(z) = \begin{cases} u_z(y,0) + u_z^{(0)}(y,0) = 0, & 0 \leq |y| \leq h \\ \sigma_{zz}(y,0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y,0) = 0, & h \leq |y| \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Підставляючи в (11), (12) вирази для переміщення та напруження з урахуванням асимптотичних значень невідомих отримуємо нескінченну систему функціональних рівнянь. Для переходу від функціональних рівнянь до алгебраїчних рівняння (11) множимо на $\cos(\beta_n y)$ і інтегруємо по повному інтервалу ($0 \leq |y| \leq 1$) Аналогічно, рівняння (12) - на $\sin(\beta_n y)$ і інтегруємо по змінній y від 0 до 1. Таким чином задача зводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розкладів A_n , B_n і невідомих τ_0, σ_0 . Перехід від нескінченної системи рівнянь до скінченної при чисельній реалізації методу призводить до виникнення похибки, яка обумовлена як редукцією системи, так і вибором номеру N , починаючи з якого переходимо до асимптотики невідомих. В рядах з асимптотичними значеннями невідомих враховували $2N$ членів.

При чисельних розрахунках якість отриманого розв'язку оцінюється рядом критеріїв. До інтегральних критеріїв, які розглядаються в більшості робіт, відносяться збіжність коефіцієнтів розкладу, виконання закону збереження енергії. Для гармонічних коливань для характеристики енергії, найчастіше, використовують осереднені за період величини. Зокрема, в роботі закон збереження енергії перевіряється як рівність середнього за період потоку потужності падаючої хвилі і відбитих хвиль. Проведений числовий аналіз показав, що починаючи з $N = 100$ перші номери коефіцієнтів $A_k, B_k, k = 1, \dots, 15$ не змінювались, до 3-х значущих цифр, а закон збереження енергії виконувався з точністю до $\delta E = 4.9 \cdot 10^{-2}\%$ падаючої хвилі. Обчислення виконані для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$, для $h = 0.5$, $\Omega_2 = 1.49$. Похибку виконання крайових умов (3) можна оцінити по даним рис.1, і рис.2, рис.2а. На рис.1 відображено розподіл компоненти зміщення u_z по торцю півшару. Крива 1 відповідає падаючій хвилі, крива 2 - зміщенню u_z розсіяного поля з оберненим знаком. На проміжку $0 \leq y \leq h$ обидві криві співпадають з графічною точністю. На рис.2 зображено розподіл дотичного напруження по торцю півшару для $N = 100$, а на рис.2а для проміжку $0.48 \leq y \leq 0.5$. На рис.2 крива 1 описує напруження падаючої хвилі, а крива 2 - напруження з оберненим знаком для розсіяного поля. Криві для напружень співпадають, за винятком області в околі особливої точки ($h - \varepsilon \leq y \leq h + \varepsilon_1$). Розподіл дотичних напружень в околі особливої точки ілюструє рис.2а для різних величини N . Для кривої 1 - $N = 1000$, для кривої 2 - $N = 700$, для 3 - $N = 600$. З рисунку видно, що при збільшенні членів ряду в представленні для напружень і зміщень точність виконання крайових умов збільшується, величина діапазону $h - \varepsilon \leq y \leq h + \varepsilon_1$ зменшується, а напруження в околі особливої точки зростають.

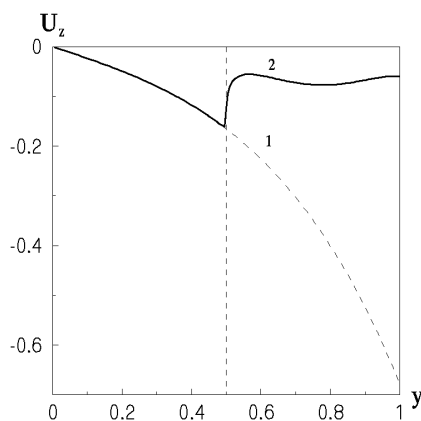


Рис.1

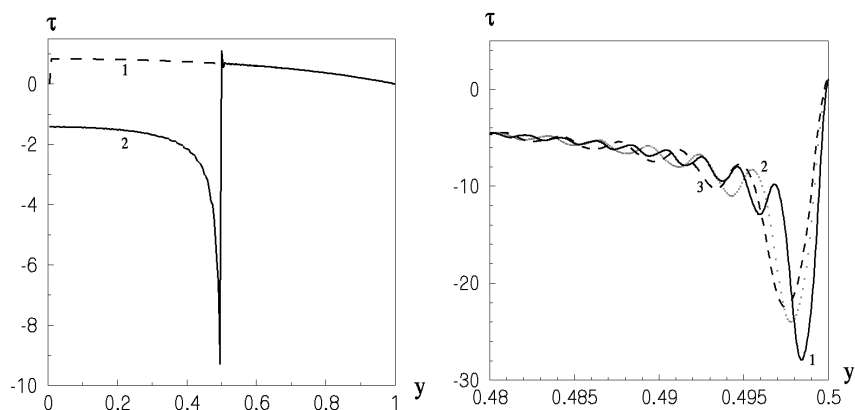


Рис.2

Рис.2а

В статті розв'язана змішана гранична задача про відбиття першої нормальної хвилі Релея-Лемба, що поширюється, від краю хвилеводу, на частині якого задані кінематичні граничні умови, а на частині динамічні.

Запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання поставленої граничної задачі із урахуванням локальної особливості фізичного поля в точці зміни типу граничних умов.

Показано, що запропонований метод дозволяє з достатньою точністю оцінити хвильове поле, обумовлене відбиттям нормальної хвилі від торця півшару із змішаними граничними умовами на його торці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009. Vol.76, p. 1771–1784.
2. Sinclair G.B. On the stress singularity at an interface crack. *International Journal of Fracture*, 1980, Vol.16, N2, p. 111–119.
3. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial crack. 1988. *Journal of applied mechanics*. Vol. 55, p. 98–103.

4. Gorodetska N.S., Nikishov V.I., Shcherbak T.M. On the scattering of surface waves by underwater obstacles. *International journal of fluid mechanic's research*. 2019. Vol. 46. № 1. P. 295–308.

Надійшла 25.05.2021.

Особенности волнового поля в полуограниченном волноводе со смешанными граничными условиями на его торце

Н. С. Городецкая, И. В. Старовойт, Т. Н. Щербак
Институт гидромеханики НАН Украины, м. Киев, Украина
E-mail: nsgihm@mail.com

Работа посвящена анализу волнового поля, которое возбуждается при отражении первой нормальной распространяющейся волны Рэлея-Лэмба от торца упругого полуслоя, часть которого жестко закреплена, а часть - свободная от напряжений. Поставленная граничная задача относится к классу смешанных граничных задач, характерной особенностью которых является наличие локальной особенности по напряжениям в точке смены типа граничных условий. Для решения поставленной краевой задачи, в работе предложен метод суперпозиции, который позволяет учесть особенность по напряжениям через асимптотические свойства неизвестных. Асимптотические зависимости для неизвестных определяются характером особенности, который известен с решения статической задачи. Критерием правильности полученных результатов был контроль точности выполнения закона сохранения энергии, погрешность выполнения которого не превышала 2% энергии падающей волны для всего рассматриваемого частотного диапазона. В работе произведена оценка точности выполнения граничных условий. Показано, что граничные условия выполняются с графической точностью по всему торцу полуслоя, за исключением окрестности особой точки (ε). При этом, вдоль заземленного торца полуслоя в окрестности особой точки напряжения остаются конечными. Наличие области ε и ограниченность напряжений обусловлена тем, что при расчетах учитывали N членов ряда, которые описывают волновое поле, а начиная с $N + 1$ члена ряда переходили к асимптотическим значениям неизвестных, число которых также было ограничено до $2N$. При увеличении величины N точность выполнения граничных условий увеличивалось, область ε уменьшалась и величина напряжений в окрестности особой точки росла.

Ключевые слова: упругие волны, смешанная граничная задача, энергетический анализ.