

УДК 517.9

MSC 35R11, 35B99

## SUBDIFFUSION FIRST-PASSAGE TIME ON DISCRETE GRID

ANDRII HULIANYTSKYI, KOSTIANTYN TOKAR

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,  
Kyiv, Ukraine, E-mail: {andriyhul, tokar.kostya}@gmail.com

## СУБДИФУЗІЙНИЙ ЧАС ПЕРШОГО ВИХОДУ НА ДИСКРЕТНІЙ СІТЦІ

А. Л. Гуляницький, К. С. Токар

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,  
Україна, E-mail: {andriyhul, tokar.kostya}@gmail.com

**ABSTRACT.** In the work considered process of continuous-time random walk, that has fat-tailed jump waiting time, on an equispaced grid of one-dimensional domain with absorbing boundary. Deduced fractional equation w.r.t. cumulative distribution function of first passage time. Obtained asymptotic of density of this variable and shown that it has fat tail.

**KEYWORDS:** first-passage time, subdiffusion, continuous-time random walk, fractional differential equations, Caputo derivative.

**АНОТАЦІЯ.** В роботі розглянуто процес випадкових блукань з неперервним часом, час очікування стрибка в якому має товстий хвіст, на рівномірній сітці одновимірної області з поглинаючою межею. Виведено напівдискретне рівняння дробового порядку відносно функції розподілу часу першого виходу. Отримано асимптотику щільності цієї величини і показано, що вона має товстий хвіст.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** задача першого виходу, субдифузія, випадкові блукання з неперервним часом, диференціальні рівняння дробового порядку, похідна Капуто.

### ВСТУП

Один з підходів до моделювання дифузійних процесів полягає в дослідженні руху окремої дифундууючої частинки як *випадкового блукання з неперервним часом* (ВБНЧ). При цьому вважається, що рух частинки відбувається миттєвими стрибками у випадкові моменти.

ВБНЧ характеризується середньоквадратичним зміщенням (СКЗ), тобто математичним сподіванням квадрата координати частинки у фіксований момент часу  $t$ . Наприклад, *вінерівський процес* має СКЗ, що зростає

лінійно по часовій змінній  $t$ . Такі ВБНЧ називають *нормальною дифузійною*. Дифузійний процес, СКЗ якого зростає сублінійно по  $t$ , називається *субдифузійною*.

Одна з моделей субдифузії — це ВБНЧ із гаусівським розподілом зміщення і часом очікування стрибка з асимптотикою щільності

$$ct^{-1-\alpha}$$

для великих  $t$ , де  $0 < \alpha < 1$ . Це *розподіл з товстим хвостом* в тому розумінні, що математичне сподівання часу очікування стрибка нескінченне. Цим моделюється наявність пасток у середовищі, які затримують рух дифундуючих частинок.

Щільність координати частинки в цьому випадку можна наблизити (див. напр. [1]) розв'язком дробового за часом *рівняння субдифузії*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = K D_0^{1-\alpha} \Delta u(x, t),$$

де  $K > 0$  — коефіцієнт дифузії,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , а  $D_0^{1-\alpha}$  — похідна Рімана-Ліувілля порядку  $1 - \alpha$  за змінною  $t$  з нижньою межею 0, тобто

$$D_0^{1-\alpha} u = \frac{\partial}{\partial t} I_0^\alpha u,$$

де

$$I_0^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(x, s) ds$$

— інтеграл Рімана-Ліувілля порядку  $\alpha$  з нижньою межею 0.

Рівняння субдифузії можна переписати у вигляді

$${}^* D_0^\alpha u(x, t) = K \Delta u(x, t),$$

де  ${}^* D_0^\alpha$  — похідна Капуто порядку  $\alpha$ , тобто

$${}^* D_0^\alpha u = I_0^{1-\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

(відомості з дробового числення див. напр. у [2, 3]).

Дробові оператори є нелокальними, тому їх присутність у рівнянні свідчить про наявність „пам'яті“ у системи:

**динаміка процесу залежить від усієї його передісторії.**

Важливою задачею для дифузійних процесів є знаходження часу першого виходу частинки, що дифундує, за межу області. Ця задача має застосування, наприклад, в математичній екології [4, 5].

Для дифузійного процесу, що описується параболічним рівнянням, відомо, що математичне сподівання часу виходу як функції початкового положення задовольняє еліптичне рівняння [6]. В [7] ця задача розглядається в багатовимірному просторі з областю, у якій лише частина межі є поглинаючою (крізь яку частинки можуть вийти).

В цій роботі з моделі ВБНЧ виводиться рівняння відносно функції розподілу часу виходу частинки та досліджується асимптотика щільності цієї

величини на нескінченності. Також проводиться комп'ютерне моделювання ймовірності часу виходу, отриманої з рівняння для функції розподілу.

### 1. ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ

Рівняння для функції розподілу отримуємо з моделі ВБНЧ.

Будемо розглядати числовий проміжок  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , в якому відбуваються випадкові блукання частинок. Кінцеві точки інтервалу  $\Omega$  можуть бути поглинаючими, тобто такими, крізь які частинки можуть виходити з області, або відбиваючими, якщо границя непроникна. Введемо позначення  $\Gamma_1$  для поглинаючої межі та  $\Gamma_2$  для відбиваючої,  $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 = \partial\Omega$ . Нашою задачею є опис часу першого виходу крізь поглинаючу межу частинки, що починає блукання в деякій точці  $\Omega$ .

Припускаємо, що частинки переміщуються між вузлами рівномірної сітки на  $\Omega$  з кроком  $\sigma$ . Стрибок частинки відбувається випадково в один із сусідніх вузлів з імовірністю  $1/2$ . Час очікування стрибка є випадковою величиною зі щільністю

$$\psi(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}} + o\left(\frac{1}{t^{1+\alpha}}\right), \quad t \rightarrow \infty \quad (1)$$

де  $\tau > 0$  та  $0 < \alpha < 1$ .

Перетворення Лапласа функції  $f(t)$  будемо позначати через  $\bar{f}(\eta) = \mathcal{L}[f](\eta)$ .

Нам знадобиться класична теорема, яка пов'язує асимптотику  $\psi(t)$  при великих  $t$  з асимптотикою  $\bar{\psi}(\eta)$  при малих  $\eta$ .

**Теорема 1** (Таубера). *(див., напр., [8]) Нехай  $\beta < 1$ , функція  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна при великих  $t$ . Тоді*

$$f(t) = t^{-\beta} + o\left(t^{-\beta}\right), \quad t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \bar{f}(\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}, \quad \eta \rightarrow 0.$$

**Наслідок 1.** *Якщо  $0 < \alpha < 1$ ,  $\forall t f(t) > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$ , то*

$$f(t) = \alpha A t^{-\alpha-1} + o\left(t^{-\alpha-1}\right), \quad t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \bar{f}(\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^\alpha, \quad \eta \rightarrow 0.$$

Позначмо через  $T_n(t)$  функцію розподілу часу виходу частинки, що в початковий момент часу була у вузлі  $n$ . Отже,  $T_n(t)$  — це ймовірність виходу частинки з вузла  $n$  за проміжок часу  $[0, t]$ .

Щоб частинка з вузла  $n$  вийшла за межі області, їй спершу потрібно дочекатися стрибка, який може відбутися в момент  $s \in [0, t]$ , після чого з ймовірністю  $1/2$  вона опиниться у вузлі з індексом  $n-1$  або  $n+1$ . З цього моменту у неї залишилось  $t-s$  часу, щоб дістатись до крайового поглинаючого вузла сітки.

З огляду на ці міркування,  $T_n(t)$  задовольняє рівняння

$$T_n(t) = \int_0^t \psi(s) \frac{1}{2} (T_{n-1}(t-s) + T_{n+1}(t-s)) ds,$$

або, виразивши інтеграл як згортку,

$$T_n(t) = \frac{1}{2} (\psi \star (T_{n-1} + T_{n+1}))(t). \quad (2)$$

Діючи перетворенням Лапласа, одержуємо

$$\bar{T}_n(\eta) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\eta) (\bar{T}_{n-1}(\eta) + \bar{T}_{n+1}(\eta)). \quad (3)$$

За наслідком з теореми 1 для перетворення Лапласа функції  $\psi$  маємо

$$\bar{\psi}(\eta) = 1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (4)$$

Відкидаючи нескінченно малі доданки, з рівняння (2) одержимо

$$\bar{T}_n(\eta) = \frac{1}{2} (\bar{T}_{n-1}(\eta) + \bar{T}_{n+1}(\eta)) - \frac{1}{2} \tau^\alpha \eta^\alpha (\bar{T}_{n-1}(\eta) + \bar{T}_{n+1}(\eta)). \quad (5)$$

Скористаймося властивістю оператора Лапласа [9]

$$\mathcal{L}[*D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - f(0)\eta^{\alpha-1}.$$

З огляду на те, що  $T_n(0) = 0$  (ймовірність виходу за нульовий час дорівнює нулю), з рівняння (5) після оберненого перетворення Лапласа маємо

$$T_n(t) = \frac{1}{2} (T_{n-1}(t) + T_{n+1}(t)) - \frac{\tau^\alpha}{2} {}^*D_0^\alpha (T_{n-1}(t) + T_{n+1}(t)), \quad (6)$$

або

$${}^*D_0^\alpha (T_{n-1}(t) + T_{n+1}(t)) = \frac{1}{\tau^\alpha} (T_{n-1}(t) - 2T_n(t) + T_{n+1}(t)). \quad (7)$$

Отже, маємо напівдискретне (дискретне за простором, неперервне за часом) рівняння для функції розподілу часу очікування виходу.

## 2. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЩІЛЬНОСТІ ЧАСУ ОЧІКУВАННЯ ВИХОДУ

Для нормальної дифузії в [6] виведено рівняння для математичного сподівання часу очікування виходу частинки з області. Проте для ВБНЧ з часом очікування стрибка з товстим хвостом (1) кількість стрибків має степеневу асимптотику з показником  $\alpha$  [10]. З'ясуємо розподіл часу очікування виходу для процесу субдифузії.

Розгляньмо нескінченну область  $(0, +\infty)$  та припустімо, що  $x_0 = 0$  — поглинаюча межа, і ми маємо нескінченну сітку для додатних  $x$ . Розгляньмо функцію  $T_1(x)$ , тобто значення функції розподілу в найближчому до поглинаючої межі вузлі  $x_1$ .

**Лема 1.** *Нехай на сітці  $\{x_n = n\sigma \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  з поглинаючою межею в точці  $x_0 = 0$  відбувається ВБНЧ зі щільністю часу очікування  $\psi(t)$ . Тоді перетворення Лапласа ймовірності виходу за час  $t$  частинки, що почала блукання у вузлі  $x_1$ , дорівнює*

$$\bar{T}_1(\eta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\psi}^2(\eta)}}{\eta \bar{\psi}(\eta)}, \quad \eta > 0. \quad (8)$$

*Доведення.* З означення маємо

$$T_1(t) = P\{\text{перший вихід відбувся до моменту } t\}. \quad (9)$$

Застосуємо формулу повної ймовірності. Очевидно, що вихід може відбутися тільки на непарному кроці, тому за повну групу подій беремо

$$X_n(t) = \{\text{Перший вихід відбувся до моменту } t \text{ на кроці } 2n+1\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Оскільки  $P\{\text{перший вихід відбувся до моменту } t \mid X_n(t)\} = 1$ , (9) переписеться у вигляді

$$T_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n(t)\}. \quad (10)$$

Подію  $X_n(t)$  можна подати як перетин двох незалежних подій  $Y_n(t)$  та  $Z_n$ , де

$$Y_n(t) = \{\text{до моменту } t \text{ відбулось принаймні } 2n + 1 \text{ кроків}\}, \\ Z_n = \{\text{на кроці } 2n + 1 \text{ відбувся перший вихід}\}.$$

Легко показати, що щільність часу очікування принаймні  $k$  стрибків дорівнює  $\psi^{\star k}(t)$ , де  $(\cdot)^{\star k}$  —  $k$ -ий степінь згортки:

$$\psi^{\star k}(t) = \int_0^t \psi(s)\psi^{\star k-1}(t-s) ds, \\ \psi^{\star 1}(t) = \psi(t).$$

Звідси маємо ймовірність  $Y_n(t)$ :

$$P\{Y_n(t)\} = \int_0^t \psi^{\star 2n+1}(s) ds.$$

Щоб обчислити ймовірність  $Z_n$ , запровадьмо поняття траєкторії. Частинка, що починає блукання в першому вузлі, може за один крок переміститися ліворуч (у такому разі вважається, що вона вийшла з області) або праворуч. Під траєкторією довжини  $k$  розумітимемо розміщення з повтореннями по  $k$  елементам двоелементної множини  $\{\rightarrow, \leftarrow\}$ . Символ  $\rightarrow$  позначає стрибок праворуч,  $\leftarrow$  — ліворуч. Отже, загальна кількість траєкторій довжини  $2n + 1$  дорівнює  $2^{2n+1}$ .

Тепер порахуймо кількість „правильних“ траєкторій довжини  $2n + 1$ , тобто таких, коли частинка вперше опиняється в нульовому вузлі на кроці  $2n + 1$ . З того, що частинка зробила вихід на кроці  $2n + 1$ , випливає, що після кроку  $2n$  вона опинилася в першому вузлі, а останній стрибок був ліворуч. Якщо частинка за перші  $2n$  кроків не вийшла в нульовий вузол, то після довільного кроку  $k \in \overline{0, 2n}$  лівих стрибків не може бути більше, ніж правих. Вихід на кроці  $2n + 1$  забезпечує рівність кількості стрибків ліворуч і праворуч за перші  $2n$  кроків, оскільки тільки так частинка на кроці  $2n$  опиниться знову в першому вузлі.

З цих міркувань, частина правильної траєкторії без останнього кроку є словом Діка в алфавіті  $\{\rightarrow, \leftarrow\}$ . Отже, кількість способів правильно зробити  $2n$  перших кроків дорівнює числу Каталана  $C_n$ . Останній крок правильної траєкторії — це завжди лівий стрибок, тому кількість правильних траєкторій довжини  $2n + 1$  дорівнює  $C_n \cdot 1 = C_n$ .

Ймовірність події  $Z_n$  можна виразити як частку кількості правильних траєкторій і загальної кількості траєкторій, тобто

$$P\{Z_n\} = \frac{C_n}{2^{2n+1}}.$$

Підставивши одержані значення в (10), маємо

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{Y_n(t)\}P\{Z_n\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n+1}} \int_0^t \psi^{\star 2n+1}(s) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Використаймо властивість перетворення Лапласа

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(s) ds \right] (\eta) = \frac{1}{\eta} \mathcal{L}[f](\eta)$$

та перехід від згортки до добутку при застосуванні перетворення Лапласа до (11). Звідси

$$\bar{T}_1(\eta) = \frac{1}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n+1}} \bar{\psi}^{2n+1}(\eta). \quad (12)$$

Нескладно показати, що (12) є розвиненням у ряд Тейлора функції (8) за умови  $|\bar{\psi}(\eta)| < 1$ . Ця умова при  $\eta > 0$  завжди виконується, оскільки  $\psi(t)$  є щільністю ймовірності.  $\square$

Розгляньмо щільність часу очікування виходу  $q_n = \partial T_n / \partial t$  та визначмо її асимптотику на нескінченності.

**Лема 2.** В умовах лема 1 при  $\psi$ , що задовольняє (1),  $\forall n > 0$  виконується

$$\bar{q}_n(\eta) = \bar{T}'_n(\eta) = 1 - n\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (13)$$

*Доведення.* Для переходу від функції розподілу до щільності застосуємо властивість перетворення Лапласа

$$\mathcal{L}[f'](\eta) = \eta \mathcal{L}[f](\eta) - f(0),$$

враховуючи, що  $T_n(0) = 0$ ,  $n > 0$ .

Проведімо доведення методом математичної індукції за  $n$ . Для бази індукції доведімо (13) при  $n = 1$  та  $n = 2$ .

Для випадку  $n = 1$  скористайтесь лемою 1, звідки

$$\bar{q}_1(\eta) = \eta \bar{T}'_1(\eta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\psi}^2(\eta)}}{\bar{\psi}(\eta)}. \quad (14)$$

Згадуючи про (4), перепишімо (14) у вигляді

$$\bar{q}_1(\eta) = \frac{1 - \sqrt{2(\tau\eta)^\alpha - (\tau\eta)^{2\alpha}}}{1 - (\tau\eta)^\alpha} + o(\eta^\alpha). \quad (15)$$

Легко пересвідчитись, що з (15) впливає асимптотика

$$\bar{q}_1(\eta) = 1 - \sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right). \quad (16)$$

Для доведення твердження при  $n = 2$  використаємо рівняння (3), підставивши  $n = 1$ . З крайової умови маємо  $T_0(t) = 1$ , звідки  $\bar{T}_0(\eta) = 1/\eta$ , тому

$$\bar{T}_1(\eta) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\eta) \left( \frac{1}{\eta} + \bar{T}_2(\eta) \right).$$

Помножмо рівняння на  $\eta$  — одержимо

$$\bar{q}_1(\eta) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\eta) (1 + \bar{q}_2(\eta)).$$

Далі,  $\bar{q}_2$

$$\bar{q}_2(\eta) = \frac{2}{\bar{\psi}(\eta)}\bar{q}_1(\eta) - 1.$$

Підставмо асимптотики (4) та (16):

$$\bar{q}_2(\eta) = 2 \frac{1 - \sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha}}{1 - (\tau\eta)^\alpha} - 1 + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Як і для дробу в (15), аналогічно маємо асимптотику

$$\begin{aligned} \bar{q}_2(\eta) &= 2 \left( 1 - \sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} \right) - 1 + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right) = \\ &= 1 - 2\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right). \end{aligned}$$

Отже, ми довели базу індукції. Припустімо, що твердження (13) виконується при  $n - 1$  та  $n$ . Доведемо, що воно виконується для  $n + 1$ .

Перейдімо до похідних у рівнянні (3), помноживши його на  $\eta$ :

$$\bar{q}_n(\eta) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\eta) (\bar{q}_{n-1}(\eta) + \bar{q}_{n+1}(\eta)).$$

Виразивши  $\bar{q}_{n+1}$  з останнього рівняння, маємо

$$\bar{q}_{n+1}(\eta) = \frac{2}{\bar{\psi}(\eta)}\bar{q}_n(\eta) - \bar{q}_{n-1}(\eta),$$

звідки за припущенням індукції

$$\bar{q}_{n+1}(\eta) = 2 \frac{1 - n\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha}}{1 - (\tau\eta)^\alpha} - \left( 1 - (n-1)\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} \right) + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Знову спрощуючи дріб в асимптотиці, остаточно одержуємо

$$\begin{aligned} \bar{q}_{n+1}(\eta) &= 2 \left( 1 - n\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} \right) - \left( 1 - (n-1)\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} \right) + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right) = \\ &= 1 - (n+1)\sqrt{2\tau^\alpha \eta^\alpha} + o\left(\eta^{\frac{\alpha}{2}}\right). \end{aligned}$$

Лема доведена. □

**Теорема 2.** В умовах лема 2 для щільності часу очікування виходу  $\forall n > 0$  справедлива асимптотика

$$q_n(t) = n \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{2\tau^\alpha}}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} t^{-\frac{\alpha}{2}-1} + o\left(t^{-\frac{\alpha}{2}-1}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

*Доведення.* З леми 2 маємо асимптотику для перетворення Лапласа функції  $q_n$ . Оскільки  $q_n$  — щільність ймовірності, то для неї справджуються умови наслідку теореми 1. Застосування цього наслідку доводить (17).  $\square$

**Наслідок 2.** *Час виходу з області для процесу субдифузії має нескінченне математичне сподівання.*

Розподіл часу виходу має товстий хвіст, тож у випадку повільної дифузії неможливо вивести рівняння для середнього часу виходу, як це робилося у випадку нормальної дифузії.

### 3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

В цьому розділі буде розглянуто комп'ютерне моделювання для обчислення ймовірності часу виходу з напівдискретного рівняння (7) на області

$$\Omega = (0, 1)$$

з поглинаючою межею  $\Gamma_1 = \{0\}$  та відбиваючою  $\Gamma_2 = \{1\}$ .

Для дискретизації похідної Капуто застосуємо L1-метод [11], а саме,

$${}^*D_0^\alpha f(t_j) \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{k=0}^j \rho_{jk} f(t_{j-k}), \quad (18)$$

де вагові коефіцієнти суми визначаються формулою

$$\rho_{jk} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \begin{cases} 1, & k=0 \\ (k-1)^{1-\alpha} - 2k^{1-\alpha} + (k+1)^{1-\alpha}, & k=1, \dots, j-1 \\ (j-1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}, & k=j \end{cases}.$$

Наближення (18) має порядок  $2-\alpha$  за умови  $f \in C^2([0, T])$  [12, 13].

Застосування (18) до рівняння (7) дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Рівняння для  $n=1$  легко виводиться з (6), оскільки

$$T_0(t) = 1.$$

Крайові умови дискретизованої задачі мають вигляд

$$\begin{aligned} T_0^j &= 1, \\ T_n^j &= T_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Варто зауважити, що матриця одержаної системи лінійних алгебраїчних рівнянь має діагональну перевагу лише за умови

$$\Delta t \geq \tau \left( \frac{\rho_{j0}}{2} \right)^\alpha.$$

Для експериментів було використано однорідну просторову сітку з кроком

$$\Delta x = \sigma = 10^{-3}.$$

Обрано часовий крок  $\Delta t = 10^{-6}$ . Час очікування стрибка і порядок дифузії взято рівними  $\tau = 10^{-8}$  і  $\alpha = 0,75$ .

Функцію розподілу  $T_n$  у вибрані моменти  $t$  зображено на рис. 1.



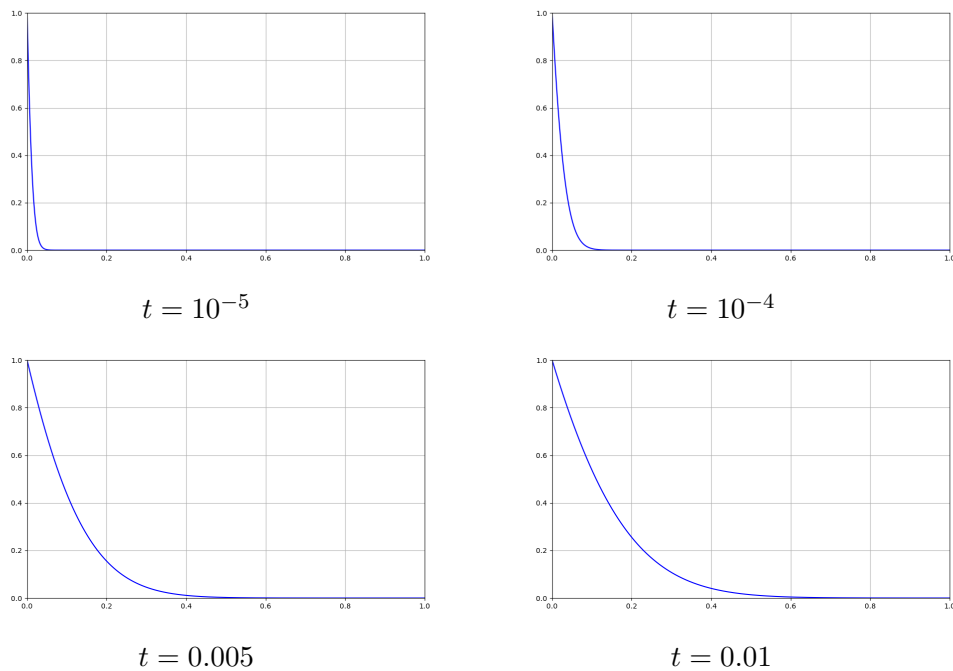


Рис. 1. Функція розподілу  $T_n$  у вибрані моменти  $t$ .

Як бачимо, розв'язок зростає з часом, причому це зростання швидше в околі поглинаючої межі. В кожний фіксований момент часу функція монотонно спадає за  $x$ . Це відповідає тому, що дифундуючі частинки, близькі до поглинаючої межі, мають більшу ймовірність вийти з області раніше.

#### ВИСНОВКИ

Проведено аналіз часу виходу з області для випадку субдифузії. Виходячи з процесу ВБНЧ, виведено рівняння відносно функції розподілу часу виходу і показано, що цей розподіл має товстий хвіст, що відрізняє розглянутий випадок від нормальної дифузії.

Відкритим залишається питання про виведення неперервного за простором рівняння відносно функції розподілу часу виходу та крайових та початкових умов для нього. Крім того, досліджено лише час виходу на півпрямій, що можна узагальнити до багатовимірної області.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37. No. 31. P. R161.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006.

3. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer Science & Business Media, 2010.
4. Cobbold C. A., Lutscher F. Mean occupancy time: linking mechanistic movement models, population dynamics and landscape ecology to population persistence. *Journal of mathematical biology*. 2014. Vol. 68. No. 3. P. 549–579.
5. McKenzie H. W., Lewis M. A., Merrill E. H. First passage time analysis of animal movement and insights into the functional response. *Bulletin of mathematical biology*. 2009. Vol. 71. No. 1. P. 107–129.
6. Berg H. C. Random walks in biology. Princeton University Press, 2018.
7. Ovaskainen O., Cornell S. J. Biased movement at a boundary and conditional occupancy times for diffusion processes. *Journal of Applied Probability*. 2003. Vol. 40. No. 3. P. 557–580.
8. Rycroft C. H. Continuous-Time Random Walks. Lecture Notes, MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu/index.htm>, 2006.
9. Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier, 1998.
10. Klafter J., Sokolov I. M. First steps in random walks: from tools to applications. OUP Oxford, 2011.
11. Li C., Zeng F. Numerical methods for fractional calculus. CRC Press, 2015. .
12. Diethelm K. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electronic transactions on numerical analysis*. 1997. Vol. 5. No. 1. P. 1–6.
13. Diethelm K. Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals. *IMA journal of numerical analysis*. 1997. Vol. 17. No. 3. P. 479–493.

Надійшла: 08.06.2022 / Прийнята: 28.06.2022