Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.977.55
MSC 93C55, 93C95, 03C45, 49N05, 03H10

GENERAL SOLUTION OF TERMINAL CONTROL PROBLEM OF A LINEAR DISCRETE SYSTEM

V. T. Matvienko, V. V. Pichkur, D. I. Cherniy, E. O. Demkivskiy
Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: matvienko.vt@gmail.com, volodymyr.pichkur@knu.ua, d_cherniy@ukr.net

ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ

В. Т. Матвієнко, В. В. Пічкур, Д. І. Черній, Є. О. Демківський
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: matvienko.vt@gmail.com, volodymyr.pichkur@knu.ua, d_cherniy@ukr.net

Abstract. The paper analyzes the mathematical problem consisting of constructing a general solution to the problem of terminal control of a discrete system. We gibe the general solution and the general pseudosolution for the linear system. A solution to the problem of constructing the reachability set from the origin of the coordinates with restrictions on the norm of the control function is obtained.
Keywords: discrete system, terminal control, pseudoinverse matrix, reachability set.

Анотація. В роботі аналізується математична проблема побудови загального розв'язку задачі термінального керування дискретної системи. Наводяться загальний розв'язок і загальний псевдорозв'язок для лінійної системи. Одержано розв'язок задачі конструювання множини досяжності з початку координат при обмеженнях на норму функції керування.
Ключові слова: дискретна система, термінальне керування, псевдообернена матриця, множина досяжності.

Вступ

Задача термінального керування є однією з базових в теорії керування. Для лінійної системи керування умови розв'язності такої задачі пов'язані з критеріями керованості. Разом з тим виникає проблема конструювання множини всіх керувань, які б забезпечували розв'язок задачі термінального керування. Параметричне представлення всього класу таких керувань ми називаємо загальним розв'язком. Разом з тим, якщо умови керованості для системи керування не виконуються, то ставиться задача про знаходження керувань, які б забезпечували перехід в найближчий стан до заданого і, відповідно, знаходження всіх таких керувань в параметричному вигляді [1, 2]. Така проблематика має суттєве прикладне значення, зокрема, в задачах аналізу функціональної стійкості технологічних процесів [3].

В статті пропонується побудова загального розв'язку задачі термінального керування лінійної дискретної системи. Знайдено загальний псевдорозв'язок за умови втрати керованості у фінальний стан. Крім цього, одержано розв'язок задачі конструювання множини досяжності з початку координат при обмеженнях на норму функції керування. .

В статті позначаємо: $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір з евклідовою нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$; $\overline{0,N}$ — сукупність цілих чисел від 0 до N; T — знак транспонування; A^{-1}, A^{+} — обернена, псевдообернена матриця до матриці A, $Im(A)$, $Ker(A)$, $\det A$ — образ, ядро, визначник матриці A.

1. Постановка задачі термінального керування

Нехай система керування з дискретним аргументом описується системою рівнянь

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \tag{1}$$

$$x(0) = x_{(0)}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор стану системи (1), $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор керування системою, $f(x,u,k)$ — неперервна за x та u при кожному фіксованому k векторфункція розмірності n, $k = \overline{0,N}$, $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ — початковий стан. Припустимо, що система (1) за умови (2) керована в термінальний стан

$$x(N+1) = x_{(1)}, \tag{3}$$

де $x_{(1)} \in \mathbb{R}^n$. Тоді проблема побудови загального розв'язку задачі термінального керування (1)–(3) формулюється так: знайти множину Ω_u всіх функций керування $u(k)$, $k = \overline{0,N}$, при яких для системи (1) виконуються умови (2), (3). Іншими словами, будь-яка функція керування $u(k)$, $k = \overline{0,N}$, що належить класу Ω_u, переводить систему керування (1) зі стану (2) в термінальний стан (3).

Під загальним розв'язком задачі термінального керування (1)–(3) в параметричній формі розумітимемо функцію керування

$$u(k) = \Psi(k, x_{(0)}, x_{(1)}, v), \tag{4}$$

яка для довільного вектора параметрів v, що належить класу параметрів Ω_v, задовольняє умовам

$$x(k+1) = f(x(k), \Psi(k, x_{(0)}, x_{(1)}, v), k), \ k = \overline{0,N}, \tag{5}$$

$$x(0) = x_{(0)}, \ x(N+1) = x_{(1)}.$$

При цьому кожний частковий розв'язок задачі термінального керування (1)–(3) описується формулою (4) при відповідному виборі вектора $v(k)$ з множини Ω_v. Тут $\Psi(k, x_{(0)}, x_{(1)}, v)$ — неперервна за $x_{(0)}$, $x_{(1)}$ та $v \in \Omega_v$ при кожному фіксованому $k = \overline{0,N}$ вектор-функція розмірності m.

Якщо система (1) за умови (2) не керована в термінальний стан (3), то виникає задача знаходження загального псевдорозв'язку задачі термінального керування (1)–(3): знайти множину Ω_u всіх функцій керування $u(k)$, $k = \overline{0, N}$, які мінімізують

$$\left\|x(N+1) - x_{(1)}\right\|^2$$

на розв'язках системи (1) з умовою (2). При цьому загальним псевдорозв'язком задачі термінального керування в параметричній формі називатимемо функцію (4), для якої має місце (5), $x(0) = x_{(0)}$ і яка для довільного $v \in \Omega_v$ мінімізує

$$\left\|x(N+1) - x_{(1)}\right\|^2.$$

При цьому кожний частковий псевдорозв'язок задачі термінального керування (1)–(3) описується формулою (4) при відповідному виборі вектора v з множини Ω_v.

2. Загальний розв'язок задачі термінального керування для лінійної системи

Розглянемо задачу знаходження загального розв'язку задачі термінального керування для лінійної систем з дискретним аргументом

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k),\ k = \overline{0, N}, \tag{6}$$

при цьому початковий і кінцевий стани

$$x(0) = 0,\ x(N+1) = x_{(1)}. \tag{7}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор стану системи (6), $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор керування, $A(k)$, $B(k)$ — матриці розмірності $n \times n$, $n \times m$ відповідно, $x_{(1)} \in \mathbb{R}^n$ — заданий кінцевий стан.

Якщо вибрати довільну допустиму функцію керування $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{0, N}$, то відповідний кінцевий стан системи (6) можна записати так

$$x(N+1) = \sum_{k=0}^{N} W(N+1, k)u(k), \tag{8}$$

де $W(N, k) = A(N-1)A(N-2)\dots A(k+1)B(k)$, $k = \overline{0, N}$. Рівність (8) можна представити також у вигляді [1,2]

$$x(N+1) = W(N+1)u, \tag{9}$$

де $u = (u^T(0), u^T(1), \dots, u^T(N))^T$ — вектор розмірності $(N+1)m$, який описує функцію керування $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{0, N}$,

$$(W(N+1,0), W(N+1,1), \dots, W(N+1,N))$$

— матриця розмірності $n \times (N+1)m$.

Отже, з (9) випливає, що задача знаходження термінального керування (1)–(3) еквівалентна пошуку розв'язку системи алгебраїчних рівнянь

$$W(N+1)u = x_{(1)}. \tag{10}$$

Розв'язок системи (10) існує тоді і тільки тоді, коли

$$x_{(1)} \in Im(W(N+1)), \tag{11}$$

де $Im(W(N+1))$ — образ матриці $W(N+1)$. Умова (11) еквівалентна рівності

$$x_{(1)} = Y(W(N+1))x_{(1)},$$

яку можна записати так

$$\left\|(I - Y(W(N+1)))x_{(1)}\right\|^2 = 0,$$

або в еквівалентному вигляді

$$x_{(1)}^T Z(W^T(N+1))x_{(1)} = 0, \tag{12}$$

де $Y(W(N+1)) = W(N+1)W^+(N+1)$ — проектор на $Im(W(N+1))$, $Z(W(N+1)) = I - W(N+1)W^+(N+1)$ — проектор на ядро $Ker(W^T(N+1))$ [4, 5].

Нехай умова (12) виконується. Отже, розв'язок системи (10) існує і цей розв'язок є розв'язком задачі

$$\left\|W(N+1)u - x_{(1)}\right\|^2 \to \min_u . \tag{13}$$

Множина розв'язків задачі (13) співпадає з множиною розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь [4]

$$W^T(N+1)W(N+1)u = W^T(N+1)x_{(1)}. \tag{14}$$

Розв'язок (14) єдиний тоді і тільки тоді, коли $\det(W^T(N+1)W(N+1)) > 0$.

Отже, **необхідні і достатні умови існування і єдиності** розв'язку задачі термінального керування (6), (7), такі

$$x_{(1)}^T Z(W^T(N+1))x_{(1)} = 0,\ \det(W^T(N+1)W(N+1)) > 0, \tag{15}$$

відповідне керування визначається рівністю

$$\begin{aligned} u = \left(W^T(N+1)W(N+1)\right)^{-1} W^T(N+1)x_{(1)} = \\ = W^T(N+1)\left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^{-1} x_{(1)} = W^T(N+1)P^{-1}x_{(1)}, \end{aligned} \tag{16}$$

де $P = W(N+1)W^T(N+1) = \sum_{j=0}^{N} W(N+1,j)W^T(N+1,j)$.

Необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі термінального керування (6), (7)

$$x_{(1)}^T Z(W^T(N+1))x_{(1)} = 0, \tag{17}$$

при цьому множина керувань, які розв'язують задачу термінального керування (6), (7), визначається через загальний розв'язок [4] системи лінійних алгебраїчних рівнянь (14) у вигляді

$$\begin{aligned} u = \left(W^T(N+1)W(N+1)\right)^+ W^T(N+1)x_{(1)} + Z(W^T(N+1)W(N+1))v = \\ = W^T(N+1)\left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^+ x_{(1)} + \\ + Z(W^T(N+1)W(N+1))v,\ v \in \mathbb{R}^{m(N+1)}, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\begin{aligned}
&Z(W^T(N+1)W(N+1)) = \\
&= I - (W^T(N+1)W(N+1))^+W^T(N+1)W(N+1) = \\
&= I - W^T(N+1)(W(N+1)W^T(N+1))^+W(N+1) = \\
&= I - W^T(N+1)P^+W(N+1),
\end{aligned}$$

при цьому вектор

$$u_0 = \left(W^T(N+1)W(N+1)\right)^+ W^T(N+1)x_{(1)}$$

серед всіх керувань, які розв'язують задачу термінального керування (6), (7), має найменшу норму.

З (19) робимо висновок, що за умови (17) функція керування

$$u(k) = W^T(N+1,k)P^+x_{(1)} + v(k) - = \tag{19}$$
$$- W^T(N+1,k)P^+\sum_{j=0}^{N} W(N+1,j)v(j),\ k = \overline{0,N}$$

є **загальним розв'язком** задачі термінального керування (6), (7) в параметричній формі, де $v(j) \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{0,N}$ — довільні. Зокрема, у цьому випадку керування

$$u_0(k) = W^T(N+1,k)P^+x_{(1)} \tag{20}$$

розв'язує задачу термінального керування (6), (7) і мінімізує критерій якості

$$\mathscr{I}(u) = \sum_{j=0}^{N} \|u(j)\|^2. \tag{21}$$

Якщо умова (17) порушується, то задача термінального керування (6), (7) не має розв'язку. У цьому випадку визначаємо **псевдорозв'язок задачі термінального керування** (6), (7) як розв'язок задачі

$$\min_{u(k)} \left\|x(N+1) - x_{(1)}\right\| \tag{22}$$

за умов (6), $x(0) = x_0$. Для того, щоб псевдороз'язок задачі керування (6), (7) був єдиним необхідно і достатньо, щоб

$$x_{(1)}^T Z(W^T(N+1))x_{(1)} > 0,\ \det W^T(N+1)W(N+1) > 0,$$

при цьому псевдотермінальне керування визначається з формули

$$\hat{u} = \left(W^T(N+1)W(N+1)\right)^{-1} W^T(N+1)x_{(1)} = W^T(N+1)P^+x_{(1)}.$$

Якщо умова єдиності порушується і

$$x_{(1)}^T Z(W^T(N+1))x_{(1)} > 0,\ \det W^T(N+1)W(N+1) = 0,$$

то ми маємо множину псевдорозв'язків задачі термінального керування, яка визначається формулою

$$\Omega_{\hat{u}} = \big\{\hat{u} : \hat{u} = W^T(N+1)P^+x_{(1)}+ \\ + v - W^T(N+1)P^+W(N+1)v,\ v \in \mathbb{R}^{m(N+1)}.$$

При цьому керування (19) є **загальним псевдорозв'язком** задачі термінального керування (6), (7) в параметричній формі, де $v(j) \in \mathbb{R}^m$, $j = \overline{0, N}$ — довільні, (20) мінімізує критерій якості (21).

Зазначимо, що якщо розв'язувати задачу термінального керування системою (6) з умовами

$$x(0) = \tilde{x}_0,\ x(N+1) = \tilde{x}_{(1)},$$

де $\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_{(1)} \in \mathbb{R}^n$ — задані початковий і кінцевий стани, то така задача зводиться до задачі (6), (7), якщо

$$x_{(1)} = \tilde{x}_{(1)} - A(N)A(N-1)\dots A(0)\tilde{x}_0.$$

3. Множина досяжності

Розглянемо задачу конструювання множини досяжності $\mathscr{R}(N+1)$ системи (6) з точки $x(0) = 0$ за обмежень на керування вигляду

$$\sum_{j=0}^{N} \|u(j)\|^2 \le r^2, \tag{23}$$

де $r > 0$.

Якщо $x_{(1)} \in \mathscr{R}(N+1)$, то існує розв'язок задачі термінального керування (6), (7) і виконується умова (17)

$$x_{(1)}^T Z(W^T(N+1))x_{(1)} = 0,$$

при цьому керування, яке розв'язує задачу (6), (7) і має найменшу норму, визначається так

$$u = W^T(N+1)\left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^+ x_{(1)}. \tag{24}$$

З (23) випливає $\|u\| \le r$, звідки

$$\Big\langle W^T(N+1)\left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^+ x_{(1)}, \\ W^T(N+1)\left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^+ x_{(1)}\Big\rangle \le r^2.$$

Остання нерівність дає

$$x_{(1)}^T \left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^+ x_{(1)} \le r^2.$$

У випадку, якщо $x_{(1)} \notin \mathscr{R}(N+1)$, то або не виконується умова (17), або керування (24) не задовольняє обмеженню (23) і тоді

$$x_{(1)}^T \left(W(N+1)W^T(N+1)\right)^+ x_{(1)} > r^2.$$

Звідси можемо зробити висновок, що множина досяжності

$$\mathscr{R}(N+1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_{(1)}^T \left(W(N+1)W^T(N+1) \right)^+ x_{(1)} \le r^2 \right\} \cap$$
$$\cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T Z(W^T(N+1))x = 0 \right\}.$$

4. Термінальне керування дискретною коливною системою двох мас

Розглянемо дискретну математичну модель коливною системою, яка складається із двох мас m_1, m_2, які з'єднані пружинами з відповідними коефіцієнтами жорсткості c_1, c_2, c_3 (Рис. 1.) Позначимо через $x_1(k)$, $x_3(k)$ — координати відхилення мас від положення рівноваги, а через $x_2(k)$, $x_4(k)$ — швидкості відхилення відповідних мас (Рис. 1).

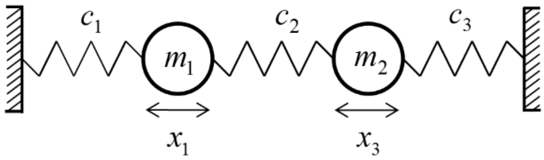

Рис. 1. Коливання двох мас

Нехай дискретна функція керування системою прикладена до першої маси. Тоді дискретна система описується наступним різнецевим співвідношенням

$$x(k+1) = (I + A)x(k) + bu(k),$$

де I — одинична матриця розміру 3×3, а матриця A і вектор b мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(c_1+c_2)}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{(c_2+c_3)}{m_2} & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta t,$$

Δt — приріст аргументу для дискретного сигналу.

Параметри коливної системи:

$$m_1 = 0.2, \; m_2 = 0.1, \; c_1 = 0.4, \; c_2 = 0.1, \; c_3 = 0.2, \; N = 50.$$

Синтезується керування u, яке переводить систему з нульового початкового стану $x(0) = (0,\, 0,\, 0,\, 0)^T$ в кінцевий стан $x(N) = (1,\, 0,\, -2,\; 0)^T$, $N = 50$, $\Delta t = 0.01$.

На Рис. 2 відображені результати розв'язання задачі термінального керування дискретною коливною системою двох мас (графіки керуючого впливу на систему $u(k)$ та перехідних процесів змінних станів системи $x_1(k)$, $x_2(k), x_3(k), x_4(k)$.

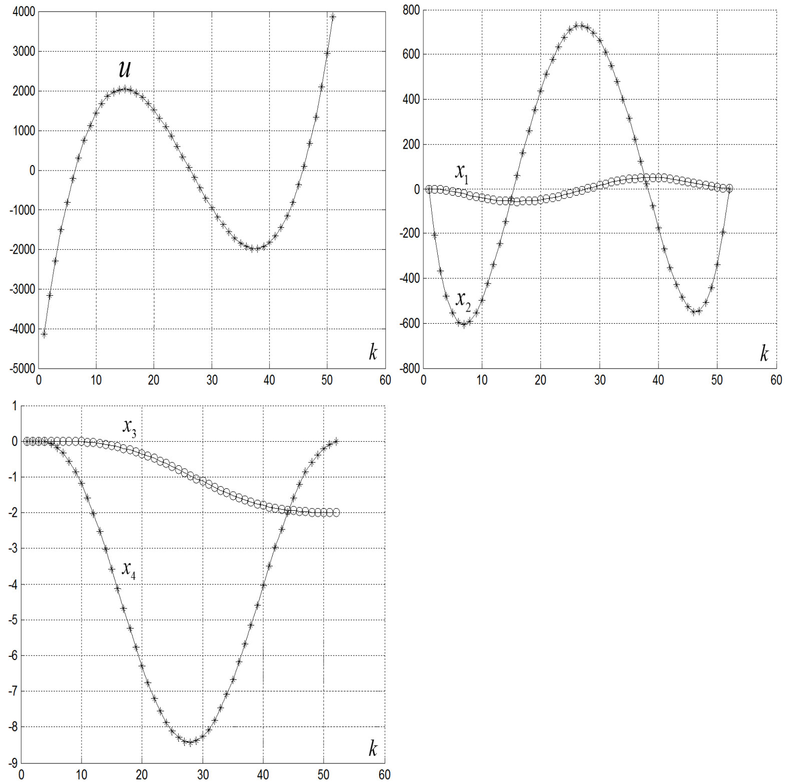

Рис. 2. Термінальне керування системою та відповідні траєкторії

Література

1. Kirichenko N. F., Matvienko V. T. Optimal synthesis of structures for linear control systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1998. 30 (1). P. 18—28
2. Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П. Псевдообращение в задачах управления и наблюдения. *Автоматика*. 1993. № 5. С. 69–81.
3. Pichkur V. V., Sobchuk V. V. Mathematical Model and Control Design of a Functionally Stable Technological Process. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2021. 29 (1). P. 32–41.
4. Albert A., Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse. Burlington: Elsevier. MA, 1972. 194 p.
5. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. Vol. 1. New York: Chelsea Publishing, 1959. 276 p.

Надійшла: 25.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022