

УДК 519.63

MSC 58J35, 74H15

**AN EFFECTIVE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE
RICHARDS–KLUTE EQUATION UNDER THE CONDITION OF
MONOTONICITY OF THE SOLUTION**

V. A. KOLESNYKOV

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com

**ЕФЕКТИВНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ
РІВНЯННЯ РІЧАРДСА–КЛЮТА ЗА УМОВ
МОНОТОННОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ**

В. А. КОЛЕСНИКОВ

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com

ABSTRACT. The article contains new numerical methods for solving the Richards–Klute equation under the condition of monotonicity of the solution. Modified numerical methods with tracking of the full saturation zone are proposed to improve efficiency of the finding an approximate solution of the equation process. A comparative analysis of the proposed methods in one- and two-dimensional cases was carried out. The analysis of the estimation of the efficiency improvement of the solving the Richards–Klute equation process was carried out.
KEYWORDS: mathematical modeling, numerical methods, Richards–Klute equation, comparative analysis.

АНОТАЦІЯ. Стаття містить нові чисельні методи для розв'язання рівняння Річардса–Клюта з умовою монотонності розв'язку за часом. Запропоновані модифікації чисельних методів з відстеженням зони повного насичення для підвищення ефективності процесу знаходження наближеного розв'язку рівняння. Проведений порівняльний аналіз запропонованих методів у одно- та двовимірних випадках. Проведений аналіз оцінки підвищення ефективності процесу розв'язання рівняння Річардса–Клюта.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: математичне моделювання, чисельні методи, рівняння Річардса–Клюта, порівняльний аналіз.

ВСТУП

Рівняння Річардса–Клюта [1, 2] описує процес масопреносу в пористому середовищі. Його використовують для моделювання процесів зрошення,

при побудові іригаційних систем та при аналізі техногенних катастроф, що стосуються розповсюдження токсичних речовин у ґрунті.

За рахунок розділення області дослідження на насичену та ненасичену зони, в яких рівняння Річардса–Клюта описується еліптичним та параболічним рівняннями відповідно, рівняння Річардса–Клюта є квазілінійним виведеним еліптико-параболічним рівнянням у часткових похідних [3], що виливається у великі складнощі при отриманні апріорних оцінок для його розв'язків. Це також є причиною того, що відомо дуже мало аналітичних розв'язків даного рівняння. Один з них можна знайти у роботі [4]. Стосовно апріорних оцінок можна виокремити класичні роботи [5, 6], в яких доводяться основні властивості слабких розв'язків рівняння Річардса–Клюта, такі як існування, єдиність та регулярність. У роботах [7, 8] рівняння Річардса–Клюта розглядається з точки зору насиченої та ненасиченої областей, що змінюються з часом.

Оскільки як аналітичних розв'язків рівняння Річардса–Клюта, так і апріорних оцінок для цього рівняння існує небагато, то основним інструментом розв'язання рівняння та, тим самим, моделювання процесу масопереносу у пористому середовищі є чисельні методи. Швидкість обчислень при моделюванні задач математичної фізики і, зокрема, рівняння Річардса–Клюта є важливим питанням. Побудова ефективного чисельного методу може суттєво підвищити продуктивність в галузях, для яких ключовою задачею є моделювання процесу масопереносу в пористому середовищі.

Серед чисельних методів та схем можна виокремити роботи [9–15]. Роботи [9–12] присвячені стратегіям підвищення точності проксимації розв'язку рівняння Річардса–Клюта. В [9] пропонується альтернативна стратегія апроксимації рівняння для негомогенних середовищ. В роботах [10, 11] рівняння Річардса–Клюта лінеаризується для підвищення ефективності обчислень. Стаття [12] присвячена чисельним методам, побудованим за допомогою модифікації представлення величини потенціалу тиску. Огляд сучасних чисельних методів можна знайти в роботах [13–15]. Хоч результати вищенаведених статей і дають вигоду у ефективності або точності, на практиці найчастіше використовують стандартні різницеві схеми з методами скінченних елементів (FEM) та скінченних об'ємів (FVM), оскільки вони є найпростішими в реалізації.

Запропоновані нові методи не викликають складнощів при реалізації та призводять до підвищення ефективності процесу моделювання при збереженні точності. Нові методи спираються на розділення області, на якій розглядається рівняння Річардса–Клюта, на зони повного та неповного насичення. Проте використання запропонованих методів обмежене властивістю монотонності розв'язку рівняння, але ця умова на практиці зустрічається досить часто.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо рівняння Річардса–Клюта, що описує процес масопереносу у пористому середовищі:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z} + s, \quad (1)$$

де θ — насиченість (безрозмірна), h — потенціалу гідравлічного тиску (м), s — інтенсивність джерел (1/с, можуть бути від'ємними у випадку стоків), K — водопроникність (м/с) середовища (залежить від насиченості), z — вертикальна координата, $(x, y, z, t) \in \Omega \times [0, T]$.

Для знаходження наближеного розв'язку рівняння Річардса–Клюта найчастіше використовують стандартну зворотну схему Ейлера у поєднанні з методом скінченних елементів або скінченних об'ємів, причому на кожному кроці по часу вузли просторової дискретизації охоплюють всю досліджувану область Ω . Тим самим розмірність матриці, що будується для знаходження значення розв'язку на наступному кроці по часу, рівна загальній кількості вузлів по простору і ця кількість залишається незмінною. Проте за деяких умов насичена зона в області Ω не зменшується, тому, якщо розглядати окремо насичену Ω_s ($\theta = \theta_{max}$) та ненасичену Ω_u ($\theta < \theta_{max}$) зони на кожному кроці по часу, то можна зменшити розмірність матриці, що задає значення розв'язку на наступному кроці і пришвидшити процес моделювання. Для цього достатньо при заповненні матриці розглядати лише вузли з ненасиченої на даному кроці зони. Для насиченої ж зони, строго кажучи, $\theta = \theta_{max}$ і, якщо ми припускаємо, що насичена зона не звужується з плином часу, то, якщо значення коефіцієнту насиченості у вузлі досягло свого максимально можливого значення, то і надалі в даному вузлі буде спостерігатися це значення.

Як приклад, розглянемо одновимірне рівняння Річардса–Клюта з параметрами, що описані у роботі [16]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z}, \quad (z, t) \in [0, 40] \times [0, +\infty), \quad (2)$$

$$\theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, \quad K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma}, \quad (3)$$

$$h(z, 0) = -61.5, \quad \partial \theta(0, t) / \partial t = 0, \quad h(40, t) = -20.7, \quad (4)$$

де $\alpha = 1.611 \times 10^6$, $\theta_r = 0.075$, $\theta_s = \theta_{max} = 0.287$, $\beta = 3.96$, $\gamma = 4.74$, $A = 1.175 \times 10^6$, $K_s = 0.00944$.

На Рис. 1 наведені значення наближеного розв'язку даного рівняння, отриманого методом скінченних елементів при різних значеннях t .

Аналіз розв'язку свідчить про те, що значення коефіцієнту насиченості у кожному вузлі, починаючи з того, що відповідає максимальній координаті z , швидко зростає до свого максимального значення, після чого за рахунок дії крайової умови при $z = 40$ підтримується на цьому рівні, зазнаючи лише незначних змін із часом. При цьому на кожному кроці по часу у кожному з цих вузлів дискретизується рівняння та в результаті додається нова строка до результуючої матриці. Якщо ж розглядати насичену зону Ω_s окремо, то кількість обчислень для знаходження значення розв'язку рівняння на

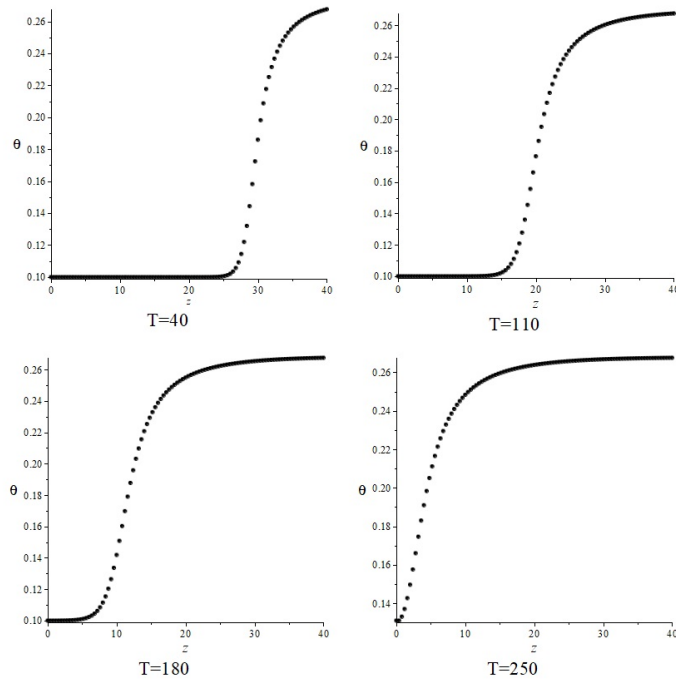


Рис. 1. Наближений розв'язок рівняння Річардса–Клюта.

наступному кроці буде зменшуватися із часом, що призведе до підвищення ефективності процесу моделювання.

Проте перш ніж проаналізувати результати моделювання за допомогою такої модифікації чисельного методу, варто дослідити питання стосовно меж його застосування. Основне припущення, необхідне для роботи запропонованого методу — це така властивість розв'язку, що

$$\theta(z, t_*) = \theta_{\max} \Rightarrow \theta(z, t) = \theta_{\max} \quad \forall t > t_*,$$

тобто якщо значення розв'язку θ у деякій точці досягло максимуму, то воно ніколи не зменшиться у цій точці. Окрім цього, варто вказати, що потенціал тиску за рахунок наявності додаткових джерел речовини може змінюватися у насиченій зоні, впливаючи на потік речовини на границі насичення-ненасичення, тим самим впливаючи на подальший розв'язок. Тож будемо також припускати, що такого явища не відбувається. Як вже було вказано вище, апріорних оцінок для розв'язків рівняння Річардса–Клюта вкрай мало. У більшості робіт властивості монотонності розв'язку, якщо вони необхідні, отримуються з фізичної інтерпретації рівняння Річардса–Клюта, а не з властивостей самого рівняння. Умови, що з фізичної точки зору гарантують монотонність розв'язку, можна описати наступним чином.

1) $s(t) \geq 0$, $s'(t) \geq 0$, тобто в середовищі відсутні стоки рідини та інтенсивність джерел не спадає;

2) $\partial\theta(\omega, t)/\partial t \geq 0$, $\omega \in \Gamma_1$, тобто крайова умова першого роду повинна бути такою, щоб значення коефіцієнту насиченості в ній не спадало з часом;

3) $\partial q(t)/\partial t \geq 0$, де q — нормальний додатний потік маси через частину межі Γ_2 , він також має бути неспадним;

4) $\theta(\omega, 0) = \theta_r$, тобто в якості початкової умови обирається повністю висушене середовище.

2. МОДИФІКАЦІЇ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Оскільки через похибки в обчисленнях значення насиченості у вузлі на деякий момент часу t може не точно дорівнювати θ_{max} , то, очевидно, треба обрати деяке мале число ϵ , щоб при потраплянні значення насиченості у вузлі в проміжок $[\theta_{max} - \epsilon, \theta_{max}]$, це значення замінювалося на θ_{max} . Але число ϵ в той же час повинно бути достатньо великим, щоб покривати собою не тільки похибки обчислень, а і нехтувати відхиленнями від θ_{max} , які за тих чи інших причин можна вважати незначними, тим самим ще пришвидшуючи процес моделювання. Проте така проста заміна сама тоді може призвести до суттєвих подальших похибок при моделюванні. Тому постає питання, до якої величини доцільніше буде прирівняти значення коефіцієнту насиченості у вузлі, яке майже досягає межі насичення, щоб надалі можна було розділяти насичену та ненасичену підобласті, при цьому не генеруючи значні похибки.

Серед варіантів відповіді на це питання можна висунути наступні пропозиції (θ_i^j — значення коефіцієнту насиченості у вузлі i в момент часу j):

A) $\theta_i^{j+1} = \theta_{max}$;

B) $\theta_i^{j+1} = \theta_i^j$, тобто в подальшому залишати значення насиченості незмінним;

C) $\theta_i^{j+1} = \frac{1}{|\Omega_s|} \sum_{k \in \Omega_s} \theta_k^j$, тобто усереднення значення по всій насиченій області;

D) $\theta_i^{j+1} = LinApprox(\theta_k^j \in \Omega'_s) \Big|_{z=i}$, де Ω'_s — максимальна зв'язна підмножина Ω_s , що містить θ_i^j , $LinApprox$ — функція, що є лінійною апроксимацією по точкам з Ω'_s .

Будь-яка з цих чотирьох стратегій залишає насичені вузли насиченими (звісно, насичені ці вузли з точністю до ϵ).

Для того, щоб визначити найбільш ефективну із запропонованих стратегій, порівняємо їх роботу на вищенаведеному прикладі. Таблиця 1 містить значення абсолютних α та відносних δ похибок при застосуванні модифікованого методу з кожною з вищенаведених стратегій у порівнянні зі звичайним методом скінченних елементів. Останній стовпчик Табл. 1 містить коефіцієнт відношення часу, витраченого на моделювання процесу на ітераціях $j = 150 \dots 400$ за допомогою модифікованого методу, до часу, який витрачає стандартний метод. Передостанній стовпчик містить значення відношення кількості насичених вузлів до кількості усіх вузлів на момент ітерації $j = 250$. Параметри дискретизації в усіх випадках були наступні: $\Delta t = 5$, $\Delta z = 0.4$; вузол вважався насиченим, якщо значення виразу $(\theta_{max} - \theta)/\theta_{max}$ було менше за $\epsilon = 0.002$.

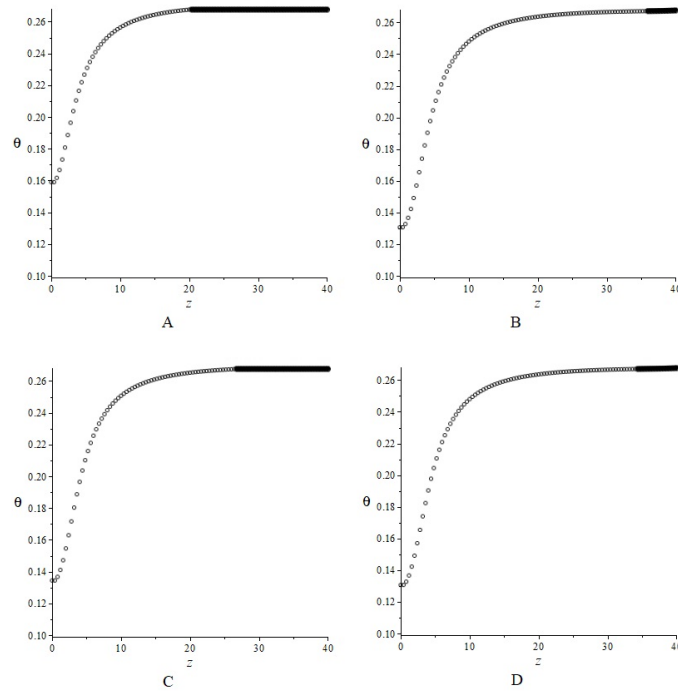


Рис. 2. Модифікації чисельних методів.

Метод	α	δ	$ \Omega_s / \Omega , j = 250$	T_{mod}/T_{FEM}
A	0.7091	2.845e-2	0.5	0.7073
B	0.0711	2.855e-3	0.06	0.9126
C	0.1853	7.433e-3	0.33	0.8535
D	0.1150	4.616e-3	0.11	0.9311

З результатів моделювань можна зробити наступні висновки. По-перше, стратегія збільшення коефіцієнту насиченості до максимального значення призводить до більших похибок у порівнянні з іншими стратегіями. По-друге, стратегії В та D дають найкращі результати в плані похибок, проте це є наслідком того, що відносна частина насичених вузлів є досить малою, тобто процес моделювання не досить сильно відрізняється за складністю від використання звичайних методів. З точки зору поєднання ефективності та точності, метод усереднення показує найкращі результати.

На Рис. 2 зображені результати наближення на момент ітерації $j = 250$, отримані за допомогою усіх чотирьох запропонованих методів. Символом ‘●’ у кожному випадку позначаються вузли з Ω_s , символом ‘○’ — вузли з Ω_u .

Також постає питання про ефективність обчислень. З Табл. 1 можна зробити висновок, що запропоновані методи дають вигравш у часі, що втрачається на процес моделювання. При використанні модифікованих чисельних методів на кожному кроці по часу відбувається дві процедури:

знаходження насичених вузлів та обрахунок нового значення коефіцієнту насиченості в них на наступному кроці, виходячи з обраної стратегії A-D, та побудова та розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) на ненасичених вузлах.

Нехай T_1 і T_2 — час, що витрачається на виконання обох процедур відповідно. Оскільки в одновимірному випадку матриця СЛАР є тридіагональною, то для виконання процедури її розв'язання можна використовувати метод прогонки, що займає час $O(n)$. Для стратегій A і B очевидно, що $T_1 \ll T_2$. Для стратегій C і D у випадках, коли $|\Omega_u| \ll |\Omega_s|$, може виникнути ситуація, коли $T_1 > T_2$. Проте, поки таке відношення об'ємів насичених та ненасичених зон встановиться, пройде багато ітерацій, для яких $T_1 \ll T_2$, тому надалі вважатимемо, що для всіх запропонованих стратегій $T_1 \ll T_2$ принаймні у середньому. Тоді час виконання одного кроку процедури знаходження наближеного розв'язку визначається часом розв'язання СЛАР, який, в свою чергу, визначається кількістю ненасичених вузлів. Якщо у середньому під час процесу моделювання $|\Omega_u|/|\Omega| = p$, то відношення загального часу, що витрачається на процес моделювання з використанням модифікованого методу до часу з використанням немодифікованого методу, можна оцінити наступним чином.

$$\frac{T_{mod}}{T} = \frac{mO(pn)}{mO(n)} \approx p, \quad (5)$$

де m — кількість ітерацій по часу. При використанні запропонованих методів до рівняння (2)–(4) величини p відрізнялися в залежності від обраної стратегії. Це є ще одним фактором, що впливає на значення у останньому стовпчику Табл. 1.

3. Двовимірний випадок

У випадку дво- або тривимірного варіанту запису рівняння Річардса-Клюта та його подальшої дискретизації та зведення до СЛАР ми отримуємо матрицю A з наступними властивостями:

- 1) A — розріджена,
- 2) $a_{ij} = a_{ji}$, тобто A — симетрична,
- 3) $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, тобто A має діагональну перевагу.

З цих властивостей випливає, що для розв'язання СЛАР можна використовувати модифіковані для розріджених матриць чисельні методи типу Зейделя та спряжених градієнтів. Час роботи таких алгоритмів оцінюється як $O(mn)$, де n — кількість строк матриці A , m — кількість ітерацій методу для досягнення необхідної точності розв'язку СЛАР. Якщо вважати, що m не залежить від n , то оцінка підвищення ефективності за рахунок використання модифікованих методів є такою самою, як і у випадку одновимірного рівняння Річардса-Клюта.

Для демонстрації розглянемо двовимірне рівняння Річардса-Клюта:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla (K(h) \nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z}, \quad (y, z, t) \in [0, 1] \times [0, 40] \times [0, +\infty), \quad (6)$$

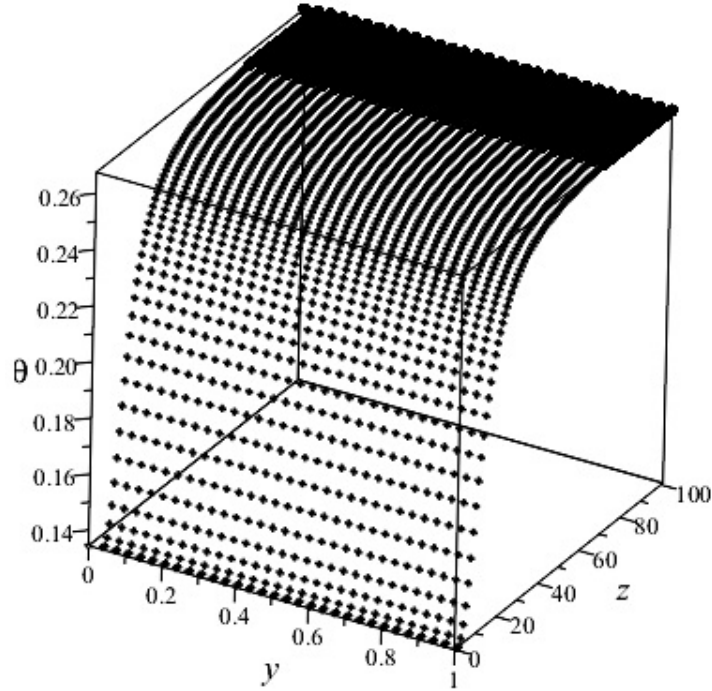


Рис. 3. Модифікація зі стратегією С у двовимірному випадку.

$$\theta(h) = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{\alpha + |h|^\beta} + \theta_r, \quad K(h) = K_s \frac{A}{A + |h|^\gamma}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(0, z, t) = \frac{\partial \theta}{\partial y}(1, z, t) = 0, \quad (8)$$

$$h(y, z, 0) = -61.5, \quad \frac{\partial \theta(y, 0, t)}{\partial t} = 0, \quad h(y, 40, t) = -20.7, \quad (9)$$

де $\alpha = 1.611 \times 10^6$, $\theta_r = 0.075$, $\theta_s = \theta_{max} = 0.287$, $\beta = 3.96$, $\gamma = 4.74$, $A = 1.175 \times 10^6$, $K_s = 0.00944$.

На Рис. 3 наведений графік апроксимації розв'язку двовимірної задачі методом скінченних елементів, де символом '•' знову позначені вузли, в яких дискретизація рівняння не відбувалася після досягнення значення коефіцієнту насиченості, такого, щоб $(\theta_{max} - \theta)/\theta_{max}$ було менше за $\epsilon = 0.002$. У якості значення вузла на наступному кроці по часу використовувався метод С, усереднюючи значення θ по всім вузлам у відповідній частині простору (y, z) .

Розглянемо також усі запропоновані модифікації для вищенаведеного двовимірного випадку рівняння Річардса-Клюта. Таблиця 2 містить оцінки, аналогічні оцінкам з Табл. 1 для одновимірного рівняння. Параметри дискретизації в усіх випадках були наступні: $\Delta t = 5$, $\Delta z = 0.4$, $\Delta y = 0.01$;

вузол вважався насиченим, якщо значення виразу $(\theta_{max} - \theta)/\theta_{max}$ було менше за $\epsilon = 0.002$.

Табл. 2				
Метод	α	δ	$ \Omega_s / \Omega , j = 250$	T_{mod}/T_{FEM}
A	7.092e+2	2.845e-2	0.5	0.4610
B	7.113e+1	2.855e-3	0.06	0.5830
C	1.853e+2	7.434e-3	0.33	0.6522
D	1.150e+2	4.616e-3	0.11	0.8161

З результатів Табл. 2 можна зробити висновок, що для двовимірного випадку на кожному кроці допоміжні обчислення для відстежування насиченої зони займають набагато менше часу в порівнянні з часом, що витрачається на розв'язування СЛАР. За рахунок того, що двовимірне рівняння (6)–(9) є розширенням на координату y одновимірного рівняння (2)–(4), значення третього та четвертого стовпців Табл. 1 і Табл. 2 майже не відрізняються, проте зменшення часу, витраченого на розв'язання рівняння Річардса–Клюта, у двовимірному випадку суттєвіше. Варто зазначити, що в стратегії D результатом функції *LinApprox* є гіперплощина, що найкраще апроксимує точки з Ω_s .

З результатів Табл. 1 та Табл. 2 можна зробити висновок, що запропонована модифікація C для чисельних методів дає найкращі оцінки з підвищення ефективності обчислень при збереженні необхідної точності наближеного розв'язку. До того ж, запропонована модифікація не викликає складнощів при реалізації чисельних методів.

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Оскільки рівняння Річардса–Клюта є квазілінійним, то чисельне моделювання є основним інструментом для отримання та аналізу його розв'язків і, тим самим, для моделювання процесу масопереносу в пористому середовищі.

Стаття містить нові чисельні методи, що базуються на відстеженні області повного насичення. Запропоновані методи не викликають складнощів при реалізації та дають перевагу для дво- та тривимірних випадків рівняння Річардса–Клюта, проте область їх використання обмежена монотонністю розв'язку. Наведена оцінка підвищення ефективності при використанні нових методів. Проведений порівняльний аналіз між запропонованими та стандартними чисельними методами.

Подальші модифікації запропонованих методів треба розробляти із розрахунку на те, що в області дослідження можуть бути стоки рідини, а крайові умови можуть бути немонотонними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Richardson L. F. Weather prediction by numerical process. University Press, Cambridge. 1922. 262 p. <https://doi.org/10.1002/qj.49704820311>.
2. Richards L. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*. 1931. Vol. 1(5). P. 318–333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>.

3. List F., Radu F. A. A study on iterative methods for solving Richards' equation. *Comput. Geosci.* 2016. Vol. 20. P. 341–353.
4. Srivastava R., Jim Yeh T.-C. Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil. *Water Resources Research.* 1991. Vol. 27. No. 5, P. 753–762. <https://doi.org/10.1029/90WR02772>.
5. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.* 1983. Vol. 183. No. 1. P. 311–341.
6. Bertsch M., Hulshof J. Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. Vol. 297. No. 1. P. 337–350.
7. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem I: Elliptic problem with a parameter. *Ukr. Math. Vystnyk.* 2014. Vol. 11. No. 1. P. 15–48. (in Russian)
8. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem II: smooth solution. *Ukr. Math. Vystnyk.* 2014. Vol. 11. No. 4. P. 447–479. (in Russian)
9. Suk H., Park E. Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. *Journal of Hydrology.* 2019. Vol. 579(124213). <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124213>.
10. Liu F., Fukumoto Y., Zhao X. A Linearized Finite Difference Scheme for the Richards Equation Under Variable-Flux Boundary Conditions. *Journal of Scientific Computing.* 2020. Vol 83. No. 16. <https://doi.org/10.1007/s10915-020-01196-y>.
11. Liu F., Fukumoto Y., Zhao X. A multi level linearized Crank–Nicolson scheme for Richards equation under variable flux boundary conditions. *Applicable Analysis.* 2023. Vol. 102. No. 6. P. 1601–1617. <https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1992395>.
12. Machado G. J., Pereira R. M. S., Clain S., Araujo N., Lopes S. O. A new stabilized scheme for a Richards' equation with evapotranspiration. *Groundwater for Sustainable Development.* 2022. Vol. 17(100736). <https://doi.org/10.1016/j.gsd.2022.100736>.
13. Farthing M. W., Ogden F. L. Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal.* 2017. Vol. 81(6). P. 1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>.
14. Zha Y., Yang J., Zeng J., Tso C.-H. M., Zeng W., Shi L. Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIRES Water.* 2019. Vol. 6. p. e1364, 10.1002/wat2.1364.
15. Kolesnykov V. Richards-Klute equation. The state of the art. 2022. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* No. 1. P. 22–34. (In Ukrainian) <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2022.1.02>.
16. Celia M., Bouloutas E., Zarba R. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research.* 1990. Vol. 26(1). P. 1483–1496. <https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483>.

Надійшла: 15.09.2023 / Прийнята: 10.10.2023