



2026, № 1

Журнал обчислювальної та
прикладної математики
Заснований в 1965 році



Journal of Numerical
& Applied Mathematics

ISSN (Print): 2706-9680, ISSN (Online): 2706-9699

ЄДРПОУ видавця: 02070944

ROR: 02aaqv166

E-mail:
jnameditorialteam@gmail.com

Головний редактор:
Ляшко Сергій Іванович

Чернорай В.О., Семенов В.В.

АЛГОРИТМ АПРОКСИМАЦІЇ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ФЕЙЄРІВСЬКОГО ОПЕРАТОРА

Адреса редакції:
Кафедра обчислювальної математики,
факультет комп'ютерних наук та кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Україна, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13.

©Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2026

Свідectво про державну реєстрацію KB 4246 від 26.05.2000
Включено в Перелік наукових фахових видань у відповідності до Наказу МОН
України № 409 від 17.03.2020

DOI: 10.17721/2706-9699.2026.1.08

УДК 519.85

MSC 47J20, 49J40, 90C25

ALGORITHM FOR FIXED POINT APPROXIMATION OF FEJER OPERATORS

V. O. CHERNORAI¹, V. V. SEMENOV²

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: vlada2002vlada2001@gmail.com

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: semenov.volodya@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3280-8245

АЛГОРИТМ АПРОКСИМАЦІЇ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ФЕЙЄРІВСЬКОГО ОПЕРАТОРА

В. О. ЧЕРНОРАЙ¹, В. В. СЕМЕНОВ²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: vlada2002vlada2001@gmail.com

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: semenov.volodya@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3280-8245

ABSTRACT. The theory of fixed points of operators and the corresponding algorithms are a powerful tool for studying nonlinear phenomena. The article considers the problems of finding fixed points of Fejer (quasi-nonexpansive) operators acting in Hilbert space, and variational inequalities on the set of fixed points. Strong convergence of the Halpern algorithm with averaging (the Halpern–Suzuki algorithm) for finding fixed points of Fejer (quasi-nonexpansive) operators is proved.

KEYWORDS: fixed point, variational inequality, optimization, Fejer operator, Halpern algorithm, strong convergence.

АНОТАЦІЯ. Теорія нерухомих точок операторів та відповідні алгоритми є потужним засобом для дослідження нелінійних явищ. В роботі розглянуто задачі пошуку нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів, що діють у гільбертовому просторі, та варіаційні нерівності на множині нерухомих точок. Доведено сильну збіжність алгоритму Гальперна з усередненням (алгоритму Гальперна-Сузукі) знаходження нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нерухома точка, варіаційна нерівність, оптимізація, фейєрівський оператор, алгоритм Гальперна, сильна збіжність.

Corresponding author: B.B. Семенов (semenov.volodya@gmail.com).

© В.О. Чернорай, В.В. Семенов, 2026. This is an open-access article distributed under the terms of **Creative Commons Attribution Licence (CC BY)**.

1. ВСТУП

Теорія нерухомих точок операторів є популярним та потужним засобом прикладної математики. Класичні топологічні теореми Брауера, Шаудера та Какутані про існування нерухомих точок мають неконструктивний характер. Природно виділити класи операторів, для яких можна конструктивно знаходити нерухомі точки. Найвідомішим прикладом такого класу є стискаючі відображення. Дійсно, в доведенні теореми Банаха–Пікара–Качіополлі явно конструюється послідовність, що збігається до нерухомої точки. Більш широким є клас нерозтягуючих операторів, теорія яких плідно розвивається з 60-х років 20 століття [1, 2].

Основними схемами, що забезпечують апроксимацію нерухомих точок нерозтягуючих операторів (в припущенні їх існування) є алгоритми Красносельського–Манна [3, 4] та Гальперна (В. Halpern) [5].

В [6] дані алгоритми систематично використовуються в побудові методів для задач опуклої оптимізації великої розмірності.

Фейєрівські (квазінерозтягуючі) оператори та породжені ними ітераційні процеси мають велике значення в оптимізаційній алгоритміці (див. [2, 7–9]). На жаль, в багатьох інших областях обчислювальної математики ці плідні конструкції не достатньо відомі. Книга [7] — одне з найкращих джерел по ітераційним алгоритмам з фейєрівською властивістю для розв’язання рівнянь, нерівностей та задач оптимізації.

В даній роботі розглянемо задачі пошуку нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів, що діють у гільбертовому просторі, та варіаційні нерівності на множині нерухомих точок. Доведемо сильну збіжність алгоритму Гальперна з усередненням (алгоритму Гальперна–Сузукі) знаходження нерухомих точок фейєрівських операторів. Ми уточнюємо результати робіт [10, 11]. Розглянемо породжені цією схемою алгоритм в’язкої апроксимації нерухомих точок та алгоритм для варіаційної нерівності на множині нерухомих точок.

2. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина.

Нагадаємо відомі поняття та факти [2, 7, 9].

Означення 1. Оператор $T : H \rightarrow H$ називають нерозтягуючим, якщо

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Позначимо через P_C оператор метричного проєкування гільбертового простору H на множину $C \subseteq H$: $P_C x = \operatorname{argmin}_{z \in C} \|z - x\|$ [2].

Лема 1. Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H , $x \in H$, $y \in C$. Наступні умови рівносильні:

- 1) $y = P_C x$;
- 2) $(y - x, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in C$.

Оператор проєкування P_C — нерозтягуючий.

Означення 2. Оператор $T : H \rightarrow H$ називають фейєрівським (квазінерозтягуючим), якщо $F(T) = \{x \in H : x = Tx\} \neq \emptyset$ та

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in H.$$

Основний приклад фейєрівського оператора — нерозтягуючий оператор $T : H \rightarrow H$ з непорожньою множиною нерухомих точок $F(T)$.

Зауваження 1. Множина $F(T)$ опукла та замкнена [2].

Для фейєрівського оператора T має місце

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &\geq \|Tx - z\|^2 = \|Tx - x + x - z\|^2 = \\ &= \|Tx - x\|^2 + 2(Tx - x, x - z) + \|x - z\|^2 \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

Звідки

$$(x - Tx, x - z) \geq \frac{1}{2} \|x - Tx\|^2 \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in C. \quad (1)$$

Сильну збіжність в просторі H позначимо через $\rightarrow$, а слабку — $\rightharpoonup$.

Означення 3. Оператор $F : C \rightarrow H$ називають замкненим в точці $y \in H$, якщо

$$x_n \rightarrow x, \quad Fx_n \rightarrow y \Rightarrow Fx = y.$$

Означення 4. Оператор $F : C \rightarrow H$ називають демізамкненим в точці $y \in H$, якщо

$$x_n \rightharpoonup x, \quad Fx_n \rightarrow y \Rightarrow Fx = y.$$

Відомо, що для нерозтягуючих операторів $T : C \rightarrow H$ оператори $I - T$ (I — тотожний оператор) демізамкнені в точці 0 [2].

Нехай $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла диференційовна функція. Якщо множина $D = \{x \in H : g(x) \leq 0\}$ непорожня, то її можна трактувати як множину нерухомих точок квазінерозтягуючого оператора

$$Tx = \begin{cases} x - \frac{g(x)}{\|\nabla g(x)\|^2} \nabla g(x), & \text{якщо } x \notin D, \\ x, & \text{якщо } x \in D, \end{cases}$$

де $\nabla g(x) \in H$ — похідна g в точці $x \in H$ [7]. Для демізамкненості в нулі оператора $I - T$ достатньо обмеженості функції g на будь-якій обмеженій множині [7].

Наступні факти [9, 12] відіграють важливу роль у доведенні результату статті.

Лема 2. Нехай (ξ_n) — послідовність невід’ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\xi_n + \alpha_n\beta_n + \gamma_n,$$

де послідовності (α_n) , (β_n) і (γ_n) мають властивості:

- 1) $\alpha_n \in [0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
- 2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq 0$;
- 3) $\gamma_n \in [0, +\infty)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$.

Лема 3. Нехай числова послідовність (a_n) має підпослідовність (a_{n_k}) , яка володіє властивістю

$$a_{n_k} < a_{n_k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує така неспадна послідовність (m_k) натуральних чисел, що

$$m_k \rightarrow +\infty \quad \text{і} \quad a_{m_k} \leq a_{m_k+1}, \quad a_k \leq a_{m_k+1} \quad \forall k \geq n_1.$$

Зауваження 2. Лема 3 [12] є ефективним інструментом дослідження збіжності ітераційних процесів, що не володіють фейєрівською властивістю відносно множини розв'язків [9, 12, 13].

3. АЛГОРИТМ ГАЛЬПЕРНА З УСЕРЕДНЕННЯМ

Розглянемо задачу:

$$\text{знайти } x \in F(T), \quad (2)$$

де $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор.

Нехай $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Розглянемо усереднені оператори

$$T_{\lambda_n} = \lambda_n I + (1 - \lambda_n)T,$$

де $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq (0, 1)$.

Для розв'язання задачі (2) використовуємо

Алгоритм 1 (алгоритм Гальперна-Сузукі). Обираємо $a \in H$, $x_1 \in C$, генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C(\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n).$$

Зауваження 3. Дослідження збіжності алгоритму 1 у класі нерозтягуючих операторів має довгу історію. Принципові результати отримано в роботах В. Halpern [5], Р.-Л. Lions [14], Р. Wittmann [15], Н.К. Xu [16–18], Т. Suzuki [10] та F. Lieder [19].

Зауваження 4. Алгоритм 1 можна трактувати як результат застосування техніки усереднення та ітеративної регуляризації Бакушинського [20] до алгоритму простої ітерації $x_{n+1} = Tx_n$.

Ми покажемо, що згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z = P_{F(T)}a$.

Для задачі (варіаційної нерівності):

$$\text{знайти } x \in F(T) : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in F(T), \quad (3)$$

де $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор, $A : H \rightarrow H$ — сильно монотонний та ліпшицевий оператор з константами $\mu > 0$, $L > 0$, відповідно, поєднання алгоритму 1 з схемою в'язкої апроксимації [18] дає

Алгоритм 2. Обираємо $x_1 \in C$, генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C(\alpha_n(x_n - \beta Ax_n) + (1 - \alpha_n)(\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)Tx_n)),$$

де $\beta \in (0, \frac{2\mu}{L^2})$.

Зауваження 5. При $\beta \in \left(0, \frac{2\mu}{L^2}\right)$ оператор $I - \beta A$ є стискаючим. Дійсно,

$$\begin{aligned} \|(x - \beta Ax) - (y - \beta Ay)\|^2 &= \|x - y\|^2 + \beta^2 \|Ax - Ay\|^2 - \\ &\quad - 2\beta(Ax - Ay, x - y) \leq (1 - 2\mu\beta + \beta^2 L^2) \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in H, \end{aligned}$$

якщо $0 < \beta < 2\mu L^{-2}$, то $0 < 1 - 2\mu\beta + \beta^2 L^2 < 1$.

Зауваження 6. Розв'язок варіаційної нерівності (3) існує та єдиний.

4. СИЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ

Наша мета — доведення сильної збіжності алгоритму 1 для фейєрівських операторів $T : C \rightarrow H$ з демізамкненим в 0 оператором $I - T$.

Має місце

Лема 4. *Згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) обмежена.*

Доведення. Для $p \in F(T)$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1 - \alpha_n) \|T_{\lambda_n} x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| \leq \max\{\|a - p\|, \|x_n - p\|\}. \end{aligned}$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \max\{\|x_1 - p\|, \|a - p\|\}, \quad n \geq 1.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена. $\square$

Доведення сильної збіжності алгоритму 1 ґрунтується на такій лемі.

Лема 5. *Для $z = P_{F(T)} a$ та послідовності (x_n) виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n (a - z, y_n - z) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $y_n = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n$.

Доведення. Має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 &= \|P_C(\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n) - z\|^2 \leq \\ &\leq \|\alpha_n(a - z) + (1 - \alpha_n)(T_{\lambda_n} x_n - z)\|^2 \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|T_{\lambda_n} x_n - z\|^2 + 2\alpha_n(a - z, y_n - z) \leq \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|T_{\lambda_n} x_n - z\|^2 + 2\alpha_n(a - z, y_n - z), \end{aligned} \quad (5)$$

де $y_n = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n$. Маємо

$$\begin{aligned} \|T_{\lambda_n} x_n - z\|^2 &= \|\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)Tx_n - z\|^2 = \\ &= \|x_n - z + (1 - \lambda_n)(Tx_n - x_n)\|^2 = \\ &= \|x_n - z\|^2 - 2(1 - \lambda_n)(x_n - z, x_n - Tx_n) + (1 - \lambda_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2. \end{aligned}$$

З (1) випливає

$$\|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \lambda_n(1 - \lambda_n)\|Tx_n - x_n\|^2.$$

Урахувавши це в (5), отримаємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n)\|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n(a - z, y_n - z), \end{aligned}$$

що і треба було довести. $\square$

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ — демізамкнений в 0, $a \in H$. Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z = P_{F(T)}a$.*

Доведення. З леми 4 випливає існування такого числа $M > 0$, що

$$|(a - z, y_n - z)| \leq M$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді з леми 5 одержуємо нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n)\|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n M. \end{aligned} \quad (6)$$

Розглянемо числову послідовність $(\|x_n - \bar{x}\|)$. Можливі два варіанти:

(а) існує номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такий, що

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall n \geq \bar{n};$$

(б) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що

$$\|x_{n_k+1} - z\| > \|x_{n_k} - z\| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо варіант (а). У цьому випадку існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$. Оскільки $\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \rightarrow 0$ та $\alpha_n \rightarrow 0$, маємо

$$\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0.$$

Отже, слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $F(T)$.

Доведемо, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, y_n - z) \leq 0. \quad (7)$$

Маємо

$$\begin{aligned} (a - z, y_n - z) = \underbrace{\alpha_n(a - z, a) + (1 - \alpha_n)(1 - \lambda_n)(a - z, Tx_n - x_n)}_{\rightarrow 0} + \\ + (1 - \alpha_n)(a - z, x_n - z). \end{aligned}$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) , таку, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, x_n - z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a - z, x_{n_k} - z).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x} \in F(T)$. Тому одержуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a - z, y_{n_k} - z) = (a - z, \tilde{x} - z) = (a - P_{F(T)}a, \tilde{x} - P_{F(T)}a) \leq 0,$$

чим і доводимо (7).

З (7) та нерівності

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, y_n - z)$$

робимо висновок, що $\|x_n - z\| \rightarrow 0$.

Розглянемо варіант (b). За лемою 3 існує послідовність номерів (m_n) з властивостями:

- (i) $m_n \nearrow +\infty$;
- (ii) $\|x_{m_{n+1}} - z\| \geq \|x_{m_n} - z\|$ для всіх $n \geq n_1$;
- (iii) $\|x_{m_{n+1}} - z\| \geq \|x_n - z\|$ для всіх $n \geq n_1$.

З нерівності (6) та (ii) випливає

$$\begin{aligned} \alpha_{m_n} \|x_{m_n} - z\|^2 + (1 - \alpha_{m_n}) \lambda_{m_n} (1 - \lambda_{m_n}) \|x_{m_n} - Tx_{m_n}\|^2 &\leq \\ &\leq 2\alpha_{m_n} (a - z, y_{m_n} - z) \leq 2\alpha_{m_n} M. \end{aligned}$$

Звідси

$$\|x_{m_n} - Tx_{m_n}\| \rightarrow 0.$$

Отже, слабкі часткові границі послідовності (x_{m_n}) належать множині нерухомих точок $F(T)$ та має місце нерівність

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, y_{m_n} - z) \leq 0.$$

Маємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{m_n} - z\|^2 \leq 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} (a - z, y_{m_n} - z) \leq 0.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{m_n} - z\| = 0.$$

Оскільки

$$\|x_{m_{n+1}} - x_{m_n}\| \leq \alpha_{m_n} \|a - x_{m_n}\| + (1 - \alpha_{m_n})(1 - \lambda_{m_n}) \|Tx_{m_n} - x_{m_n}\| \rightarrow 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{m_{n+1}} - z\| = 0.$$

Ураховуючи нерівності (iii), отримуємо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = 0.$$

Сильну збіжність послідовності (x_n) до точки $z = P_{F(T)}a$ доведено. $\square$

Теорема, аналогічна теоремі 1, має місце для схеми в'язкої апроксимації

$$y_{n+1} = P_C (\alpha_n S y_n + (1 - \alpha_n)(\lambda_n y_n + (1 - \lambda_n) T y_n)),$$

де $S : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор ($\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\lambda_n \in [\lambda, \bar{\lambda}] \subseteq (0, 1)$).

За умов теореми 1, послідовність (y_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності

$$z \in F(T) : (z - Sz, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in F(T),$$

тобто, до розв'язку операторного рівняння $z = P_{F(T)}z$.

Аналогічно доводиться

Теорема 2. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \rightarrow H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ — демізамкнений в 0, $A : H \rightarrow H$ — сильно монотонний та ліпшицевий оператор з константами $\mu > 0$, $L > 0$, відповідно. Тоді згенерована алгоритмом 2 послідовність (x_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності (3).*

Розглянемо схеми з похибками:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_C(\alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n}x_n + e_n), \\ y_{n+1} &= P_C(\alpha_n S y_n + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n}y_n + e_n), \\ z_{n+1} &= P_C(\alpha_n(I - \beta A)z_n + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n}z_n + e_n). \end{aligned}$$

Для них мають місце твердження, аналогічні теоремам 1 та 2, за умови сумовності $(\|e_n\|)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| < +\infty$ (див. також роботу [21]).

5. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

В роботі розглянуто задачі пошуку нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів, що діють у гільбертовому просторі, та варіаційні нерівності на множині нерухомих точок.

Доведено сильну збіжність алгоритму Гальперна з усередненням (алгоритму Гальперна-Сузукі) знаходження нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів. Розглянуто породжені цією схемою алгоритм в'язкої апроксимації та алгоритм для варіаційної нерівності на множині нерухомих точок.

Фейєрівські оператори та породжені ними ітераційні процеси мають велике значення в оптимізаційній алгоритміці. Перспективним напрямом є дослідження стохастичних схем типу

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_C(\alpha_n a + (1 - \alpha_n)(\lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)g_n)), \\ y_{n+1} &= P_C(\alpha_n r_n + (1 - \alpha_n)(\lambda_n y_n + (1 - \lambda_n)g_n)), \end{aligned}$$

де g_n, r_n — незміщені оцінки Tx_n, Sy_n , відповідно: $\mathbf{E}g_n = Tx_n, \mathbf{E}r_n = Sx_n$. Дане питання мотивовано розширенням традиційної алгоритміки стохастичного програмування та застосуваннями в машинному навчанні.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Goebel K., Kirk W.A. Topics in metric fixed point theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 244 p.
2. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2011. 408 p.

3. Krasnosel'skii M.A. Two remarks on the method of successive approximations. *Uspekhi Mat. Nauk.* 1955. Volume 10. Issue 1(63). P. 123–127.
4. Dong Q.-L., Cho Y.J., He S., Pardalos P.M., Rassias T.M. The Krasnosel'skii-Mann Iterative Method: Recent Progress and Applications. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2022. 127 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-91654-1>
5. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. P. 957–961. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0>
6. Ryu E.K., Yin W. Large-Scale Convex Optimization. Algorithms and Analysis via Monotone Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. 303 p.
7. Vasin V.V., Eremin I.I. Operators and Iterative Processes of Fejer Type: Theory and Applications. Berlin: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.
8. Semenov V., Stetsyuk P., Stovba V., Velarde Cantu J.M. One-Rank Linear Transformations and Fejer-Type Methods: An Overview. *Mathematics*. 2024. Volume 12. Issue 10. 1527. <https://doi.org/10.3390/math12101527>
9. Semenov V.V. Variational inequalities: theory and algorithms. Kyiv: Publishing and Printing Center «Kyiv University», 2021. 167 p.
10. Suzuki T. A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings. *Proc. of the AMS*. 2007. V. 135. N. 1. P. 99–106.
11. Semenov V.V. Two methods of approximation of the fixed point of the Fejer operator. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2013. № 1 (111). P. 46–56.
12. Mainge P.-E. Strong Convergence of Projected Subgradient Methods for Non-smooth and Nonstrictly Convex Minimization. *Set-Valued Analysis*. 2008. Vol. 16. P. 899–912. <https://doi.org/10.1007/s11228-008-0102-z>
13. Denysov S.V., Kovalenko O.Yu., Semenov V.V. Convergence of adaptive algorithms for equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of Optimization Differential Equations and their Applications..* 2025. 33 (1). P. 42–67. <https://dx.doi.org/10.15421/142503>
14. Lions P.-L. Approximation de points fixes de contractions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B*. 1977. 284. P. A1357–A1359.
15. Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. *Arch. Math.* 1992. 58. P. 486–491. <https://doi.org/10.1007/BF01190119>
16. Xu H.K. Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings. *Bull. Austral. Math. Soc.* 2002. 65 P. 109–113.
17. Xu H.K. Iterative algorithms for nonlinear operators. *J. London Math. Soc.* 2002. 2. P. 240–256. <https://doi.org/10.1112/S0024610702003332>
18. Xu H.K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 2004. 298. P. 279–291. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.04.059>
19. Lieder F. On the convergence rate of the Halpern-iteration. *Optim Lett.* 2021. Vol. 15. P. 405–418. <https://doi.org/10.1007/s11590-020-01617-9>
20. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems. Moscow: Nauka, 1989. 126 p.
21. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. New theorems of strong convergence of the proximal method for the equilibrium programming problem. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2010. № 3 (102). P. 79–88.

Надійшла: 25.02.2026 / Переглянута: 13.03.2026 / Прийнята: 13.03.2026 /
Опублікована: 24.04.2026